

Mentorierte Arbeit in Fachdidaktik Mathematik

Elemente der Signalverarbeitung

Samuel Bieri^a

Inhalt

Anhand des elektromyographischen Signals, welches bei der Aktivierung von Muskeln auftritt und zur Steuerung künstlicher Exoskelette genutzt werden kann, werden einige Begriffe der Signalverarbeitung eingeführt. Zuerst wird grob die Funktionsweise von Muskeln und die Signalübertragung in Nerven- und Muskelfasern erläutert. Im nachfolgenden mathematischen Teil behandeln wir den gleitenden Mittelwert und Fensterfunktionen. Dann wird die Fourierreihe und das Fourierintegral eingeführt. Die Fensterfunktion findet erneut Anwendung in der Kurzzeit-Fouriertransformation. Schliesslich geben wir einen Ausblick auf die Multiskalenanalyse mittels Wavelets.

Zielpublikum

Diese Arbeit richtet sich an Lehrpersonen, die im Fach *Mathematik* oder *Anwendungen der Mathematik* eine Unterrichtssequenz zum Thema Signalverarbeitung planen. Die Sequenz entspricht etwa dem Leistungsniveau von Gymnasiasten im letzten Unterrichtsjahr vor Abschluss, oder Studierenden einer Fachhochschule technischer Richtung. Als Dauer werden 5 bis 10 Lektionen vorgeschlagen. Die Unterrichtenden entscheiden je nach Unterrichtsdauer und Leistungsniveau der Klasse, wie viel Wissen im Kontext der Anwendungsbeispiele vermittelt werden soll.

Voraussetzungen

Summen und Integrale, Notationen der Mengenlehre, Sinus- und Cosinusfunktionen und deren komplexe Schreibweise.

Form

Lesetext für Lehrpersonen sowie Unterrichtsmaterial und Übungen für Schüler

Betreuung

Kristine Barro

Datum

28. Dezember 2018

^asamuel.bieri@alumni.epfl.ch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Hintergrund	3
1.2	Aufbau der Arbeit	4
1.3	Lernziele & Unterrichtsskizze	5
1.3.1	Einführung	5
1.3.2	Gleitender Mittelwert	5
1.3.3	Fourieranalyse	6
1.3.4	Kurzzeit-Fouriertransformation	6
1.3.5	Ausblick Wavelets	6
1.4	Schwierigkeiten & Ausblick	7
2	Entstehung des EMG-Signals	8
2.1	Galvanismus	8
2.2	Physiologie des Muskels	9
2.3	Das Aktionspotential	10
2.4	Summenaktionspotential	13
3	Mathematischer Inhalt	14
3.1	Signale und Rauschen	14
3.1.1	Gleitender Mittelwert	15
3.2	Frequenzanalyse	18
3.2.1	Fourierreihe	18
3.2.2	Fouriertransformation	19
3.2.3	Endliche und diskrete Signale	19
3.2.4	Kurzzeit Fouriertransformation	21
3.3	Wavelets	24
3.3.1	Gabor Wavelet	25
	Literatur	27
A	Unterrichtsmaterial	28
A.1	Ressourcen	28
A.2	Schüleraufgaben	28
A.2.1	Aufgabenblatt „Gleitender Mittelwert“	29
A.2.2	Übungsaufgaben	35
A.2.3	Lösungen - Gleitender Mittelwert	36
A.2.4	Lösungen - Übungsaufgaben	36
A.3	Slides	38

Kapitel 1

Einleitung

In der vorgeschlagenen Unterrichtssequenz sollen einige Probleme und Lösungen der *Signalverarbeitung* thematisiert werden. In diesem Themenbereich geht es darum, dass ein Signal auf der Zeitachse (oft bei diskreten Zeitpunkten) gemessen wird. Die Mathematik hilft dann, das Signal in nützliche Informationen zu verwandeln. Beispielsweise erlaubt es die *Fourieranalyse*, verschiedene Töne und Frequenzen eines Musikstücks zu erfassen und in eine zeitliche Ordnung zu bringen. Es gibt aber auch andere Arten von Signalen, für welche die Aufschlüsselung in harmonische Schwingungen weniger geeignet ist. Dazu gehören neben elektromyographischen oder kardiographischen Signalen der menschlichen Muskelsteuerung beispielsweise seismische Messungen oder Preisbewegungen an Finanzmärkten. Solche Signale zeichnen sich durch abrupte, kurzlebige Ausschläge aus, welche mit sogenannten *Wavelets* analysiert werden können.

1.1 Hintergrund

Roboter finden bereits heute eine grosse Verbreitung in den verschiedensten Bereichen menschlicher Aktivitäten. Dies geht von industriellen Anwendungen, über Raumfahrt und Medizin, bis weit hinein in unseren Alltag. Viele von uns haben schon Bekanntschaft gemacht mit autonomen Rasenmähern oder computergesteuerten Lenkhilfen in modernen Fahrzeugen, um zwei Beispiele zu nennen.

Eine Anwendung der Robotertechnik betrifft *Exoskelette* [WikiExo]. Exoskelette sind am Körper getragene Roboter, welche die Muskelkraft vergrössern oder ersetzen sollen. Deren Anwendungsbereich ist oft medizinischer Art, wie in der Rehabilitationsrobotik oder zur Bewegungshilfe bei gelähmten Körperteilen und Prothesen. Zur Sensibilisierung einer breiten Öffentlichkeit für dieses Gebiet wurde in den letzten Jahren an der ETH Zürich der *Cyathlon* [Cyb] organisiert: Ein mehrtägiger Wettkampf, bei dem Menschen mit körperlichen Behinderungen und robotischen Exoskeletten in verschiedenen Disziplinen (z.B. Treppensteigen, Hindernisparcours etc.) gegeneinander antreten.

Mit einem ähnlichen Ziel wurde der *EduExo Kit* von der ETH Zürich lanciert und gefördert. Dieser Baukasten beinhaltet ein Ellbogen-Exoskelett, welches zu Ausbildungszwecken an Schulen und Universitäten eingesetzt wird. Die Lernenden können das Exoskelett zusammenbauen und selber programmieren, um so die verschiedenen

Aspekte und Herausforderungen dieser Robotertechnik zu erfahren. Der Baukasten wird vom Startup *Beyond Robotics GmbH* weiterentwickelt und vertrieben [BR].

Parallel zu diesen beiden Projekten wird von der ETH das Projekt *Cyathlon @School* unterstützt. Hier geht es darum, Unterrichtsmodule für Fächer der Sekundarstufe II zur Verfügung zu stellen, welche die Bereiche Exoskelett und technische Assistenzsysteme für Menschen mit körperlichen Behinderungen betreffen sollen. Dabei kann der EduExo Kit oder Aspekte daraus im Unterricht eingesetzt werden. Das Sportmodul bildet den Kern, und auch ein Modul für das Fach Biologie wurde bereits entwickelt. In dieser fachdidaktischen Arbeit wird beschrieben, wie ein entsprechendes Modul für das Fach Mathematik aussehen kann.

Ein zentraler Bestandteil jedes Exoskeletts sind *Sensoren*, welche z.B. Lage und Geschwindigkeit des Roboters, aber auch menschliche Steuerungssignale erfassen können. Diese Schnittstellen zwischen Mensch und Maschine machen ein fruchtbares Zusammenspiel erst möglich. Der EduExo Kit beispielsweise umfasst einen Kraftmesser, mit dem äussere Kräfte auf den Skelettarm erfasst werden. Andererseits kann eine Oberflächen-Elektromyographie (EMG)-Sonde zur Messung der menschlichen Muskelaktivität angeschlossen werden [HB17; ME17]. Mit Hilfe des EMG-Signals kann das Exoskelett, z.B. durch Anspannung eines Armmuskels, gesteuert werden. Ziel dieses Unterrichts soll sein, mathematische Werkzeuge bereitzustellen, mit denen das EMG- und andere Signale analysiert und in nutzbare Informationen verwandelt werden können.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist folgendermassen aufgebaut. Im Rest dieser Einleitung formulieren wir für jeden Teil der geplanten fünfteiligen Unterrichtssequenz die Lernziele und skizzieren grob, wie die Unterrichtssequenz in etwa aufgebaut werden kann. In Kapitel 2 beschreiben wir Grundlagen zur Physiologie der Muskelsteuerung, mit dem Ziel, die Entstehung des elektromyographischen Signals zu verstehen. Die mathematischen Inhalte werden dann in Kapitel 3 beschrieben. Im Anhang sind Unterrichtsmaterialien und weiterführende Ressourcen zu finden.

1.3 Lernziele & Unterrichtsskizze

Geplant sind fünf Unterrichtsteile mit folgenden Lernzielen und Inhalten.

1.3.1 Einführung

Leitidee: Für Menschen mit körperlichen Behinderungen sind technische Assistenzsysteme von grosser Wichtigkeit. Die Studierenden erfahren das Problem der Steuerung von solchen Systemen am Beispiel des Exoskeletts, und lernen dazu den physiologischen Hintergrund der Muskelsteuerung kennen.

Dispositionsziel: Die Studierenden wissen, was ein Exoskelett ist. Sie erkennen die Relevanz der Steuerung von Robotern. Sie wissen, dass das *elektromyographische Signal* auf der Haut abgegriffen und zur Steuerung verwendet werden kann. Die Studierenden verstehen grob den *physiologischen Vorgang der Muskelsteuerung*.

Unterrichtsgestaltung: Die EMG-Oberflächensonde und der EduExo Kit geben eine anschauliche Illustration der Relevanz des Themenbereichs „Signalverarbeitung“. Zum Einstieg wird das Exoskelett aus dem EduExo Kit von der Lehrperson vorgeführt. Die physiologischen Vorgänge bei der Anspannung von Muskeln werden danach erklärt und die Entstehung des myoelektrischen Signals besprochen.

1.3.2 Gleitender Mittelwert

Leitidee: Signale und deren Verarbeitung sind zentrale Aspekte der modernen Gesellschaft. Die Mathematik stellt grundlegende Werkzeuge zur Signalverarbeitung zur Verfügung.

Dispositionsziel: Die Studierenden kennen einige Beispiele von *Signalen*. Sie wissen, wie ein Signal mathematisch als Funktion beschrieben wird und sie unterscheiden *zeitkontinuierliche* und *diskrete* Signale. Die Studierenden verstehen den *gleitenden Mittelwert* und seine Anwendung in der Signalverarbeitung (Glättung und Rauschunterdrückung). Sie erkennen die Nützlichkeit der *Fensterfunktion* und kennen Beispiele dazu (rechteckig, Gauss'sch, exponentiell).

Unterrichtsgestaltung: Als Einstieg zum zweiten Teil werden Beispiele verschiedener Signale vorgestellt (Tonsignal, EMG und evtl. kardiographische Signale, seismische Messungen, Finanzdaten). Es werden Fragestellungen angesprochen, welche man mit Hilfe der Signalanalyse lösen möchte, z.B. die Tonanalyse. Zeitkontinuierliche und diskrete Signale werden eingeführt. Danach wird der gleitende Mittelwert eingeführt. Die Motivation dazu ergibt sich daraus, dass jedes reale Signal *Rausche* beinhaltet. Dieses kann durch Bildung geeigneter Mittelwerten verringert oder ausgelöscht werden. Die Begriffe der Fensterfunktion und der Konvolution (Faltung) einer Funktion werden eingeführt. Der Stoff wird anhand der EMG-Signalanalyse illustriert (Siehe Abb. 3.2 und die Lernaufgabe in A.2.1).

1.3.3 Fourieranalyse

Leitidee: Das Tonsignal ist aus harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen zusammengesetzt, welche die Tonhöhe bestimmen. Auch andere Signale können in harmonische Komponenten zerlegt werden. Auf diese Weise gewinnen wir wichtige Informationen, die in einem Signal enthalten sind.

Dispositionsziel: Die Studierenden kennen Fourierreihe und Fourierintegral und sie wissen, wie diese Werkzeuge zur Signalanalyse verwendet werden. Sie verstehen den Begriff der spektralen Leistungsdichte. Die Studierenden wenden dieses Wissen zur Spektralanalyse von einfachen analytischen Funktionen an.

Unterrichtsgestaltung: Im dritten Teil soll die Fourieranalyse behandelt werden: Einführung der *Fourierreihe* einer periodischen Funktion, d.h. ihre Darstellung als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen. Die Interpretation der Koeffizienten als Gewicht der Frequenzkomponente führt zum Begriff der spektralen Leistungsdichte. Es folgt die Schreibweise als komplexe Fourierreihe und die Einführung des Fourierintegral für nichtperiodische Signale. Der Fall von endlichen und diskreten Signalen wird besprochen, was zu den Begriffen der *Frequenzauflösung* und der *Nyquist-Frequenz* führt.

1.3.4 Kurzzeit-Fouriertransformation

Leitidee: Die zeitliche Veränderung gewisser Eigenschaften eines Signals ist ein wichtiger Aspekt (z.B. die mittlere Amplitude der EMG Aktivität oder die Frequenz in einer Tonfolgen). Zur zeitlichen Analyse kann mit Hilfe einer Fensterfunktion ein Teilstück des Signals herausgelöst und in seine Frequenzkomponenten zerlegt werden.

Dispositionsziel: Die Studierenden verstehen die Zeit-Frequenz Analyse mittels Kurzzeit-Fouriertransformation. Sie erkennen, dass notwendigerweise ein Kompromiss zwischen zeitlicher Auflösung und Frequenzauflösung eingegangen werden muss, welcher von der Heisenbergsche Unschärferelation auferlegt wird.

Unterrichtsgestaltung: In diesem Teil wird auf die Zeit-Frequenz Analyse eingegangen und anhand einer Tonfolge erläutert. Die Kurzzeit-Fouriertransformation braucht geeignete Fensterfunktionen, ähnlich wie schon beim gleitenden Mittelwert besprochen wurde. Das Problem der Zeit-Frequenz Auflösung führt zur Heisenbergschen Unschärferelation.

1.3.5 Ausblick Wavelets

Leitidee: In gewissen Anwendungen ist es sinnvoll, in der Zeit-Frequenzanalyse kein festes Auflösungsfenster zu wählen, sondern beispielsweise kleine Frequenzen genauer aufzulösen als grosse Frequenzen. Die Studierenden verstehen, wie dieses Problem mittels Wavelets gelöst werden kann.

Dispositionsziel: Die Studierenden kennen die Multiskalenanalyse mittels Wavelets. Sie wissen, wie damit das Zeit-Frequenz Auflösungsfenster flexibler gestaltet wird.

Unterrichtsgestaltung: Im letzten Teil der Unterrichtssequenz wird ein Ausblick auf die Wavelet-Analyse gegeben. Die gewöhnliche Kurzzeit-Fourieranalyse hat den

Nachteil einer festen Zeit-Frequenz Auflösung. Für gewisse Signale möchte man aber, je nach Frequenzbereich, ein anderes Auflösungsfenster haben. Dieses Problem kann mit Hilfe von Wavelets gelöst werden.

1.4 Schwierigkeiten & Ausblick

Ohne Zweifel ist das Thema Signalverarbeitung im Zusammenhang mit Robotersteuerung und technischen Assistenzsystemen ein sehr aktuelles und deshalb faszinierendes Gebiet für technisch interessierte Lernende. Allerdings ist klar, dass ein Eintauchen in die entsprechende Mathematik ein breites Grundlagenwissen voraussetzt, welches an vielen Schulen zum Teil erst gegen Ende eines technisch-mathematisch ausgerichteten Maturitätslehrgangs erarbeitet wird. Diese Schwierigkeit sollte überwindbar sein, indem die Lehrperson vorhandene Lücken vor oder während der vorgeschlagenen Unterrichtssequenz entsprechend schliesst.

Eine andere didaktische Schwierigkeit sehen wir bei den Anwendungsbeispielen und Übungen für die Lernenden. Sind die mathematischen Methoden zur Signalverarbeitung im Unterricht einmal entwickelt und begründet worden, so möchte man diese an realen Daten testen. Diese Anwendung erfordert aber sehr rasch zusätzliche Kenntnisse in der Programmierung von leistungsfähigen Rechensystemen. Die an Gymnasien üblicherweise vorhandenen Werkzeuge stossen dabei rasch an ihre Grenzen. Beispielsweise ist die Berechnung des gleitenden Mittelwerts in *Microsoft Excel* für kleine Datensätze zwar möglich, aber sehr schwerfällig und aufwendig zu programmieren. Die Frequenzanalyse eines Signals auf diese Weise durchzuführen ist nicht empfehlenswert. Mächtigere Softwaretools wie *Matlab*, das Statistikprogramm *R*, oder möglicherweise *Mathematica* müssten dazu beigezogen werden. Eine Implementierung der Datenanalyse mit Hilfe der frei erhältlichen Programmiersprache *Python* wäre auch denkbar. Die Anwendung dieser Werkzeuge erfordert aber wiederum grosses Vorwissen und Vorbereitungszeit. Solche Anwendungsbeispiele würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Eine Einführung und Schulung in mindestens einem der genannten Softwaretools ist sicher lohnend für technisch-mathematisch ausgerichtete Maturitätslehrgänge oder an Fachhochschulen. Eine entsprechende Weiterentwicklung dieser Unterrichtssequenz, beispielsweise innerhalb des Informatikunterrichts, wäre denkbar.

Kapitel 2

Entstehung des EMG-Signals

2.1 Galvanismus

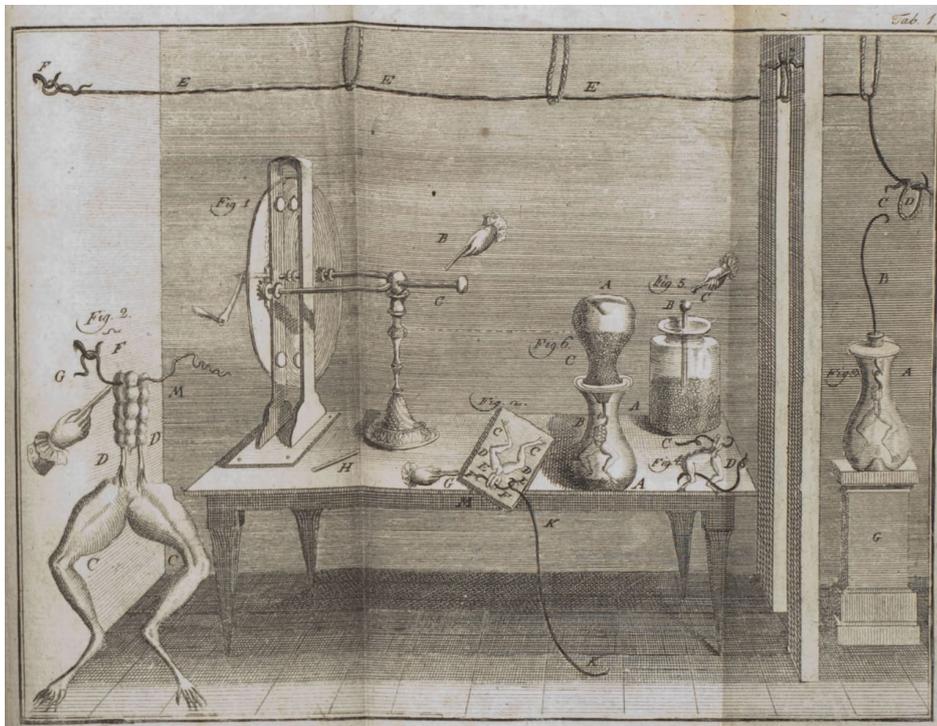


Abb. 2.1: Zeichnung des Froschschenkel-Experiments von L. Galvani aus seinem Werk „*De viribus electricitatis in motu musculari*“.

Bereits im Jahre 1780 entdeckte der italienische Arzt und Naturforscher *Luigi Galvani*, dass Froschschenkel durch Anbringen von elektrischer Spannung zum Zucken und Bewegen gebracht werden können (Abb. 2.1). Dieses Phänomen wurde später auch bei Muskeln anderer Tierarten festgestellt und an menschlichen Leichen getestet (z.B. an guillotinierten Köpfen während der Französischen Revolution). Galvanis Experimente begründeten ein neues Forschungsgebiet, das später *Galvanismus* genannt wurde. Es kann als Vorläufer der modernen Elektrophysiologie gesehen werden. Galvani und seine Nachfolger glaubten vorerst, dass hier eine neuartige und eigenständige Form von

Elektrizität am Werk war: die sogenannte „Tierelektrizität“. Erst nach langen Kontroversen konnte diese Vorstellung korrigiert werden. Bereits zu Galvanis Zeit war klar, dass Tiere auch selber Elektrizität erzeugen können. Dies wurde beispielsweise vom deutschen Naturforscher *Alexander von Humboldt* während seiner Amerikareise beim Zitteraal beschrieben.

Im späten 19. Jahrhundert erlebte der Galvanismus einen neuen Schub, als *Eduard Hitzig* und *Gustav Fritsch* in Berlin entdeckten, dass die elektrische Stimulierung gewisser Stellen im Grosshirn des Hundes (den sog. motorischen Zentren) eine Bewegung der Gliedmassen verursacht. Aus dieser wichtigen Entdeckung entwickelte sich später die moderne Neurowissenschaft. [WikiGalv]

2.2 Physiologie des Muskels

Um die Entstehung des myoelektrischen Signals besser zu verstehen, wollen wir zuerst das moderne Verständnis von Aufbau und Funktionsweise der Muskeln skizzieren. Allgemein unterscheidet man zwischen *quergestreifter* und *glatter* Muskulatur. Zur quergestreiften Muskulatur gehören die *Skelettmuskeln* und auch die *Herzmuskulatur*. Glattemuskulatur kommt in vielen Hohlorganen, sowie Blut- und Lymphgefässen, vor. An dieser Stelle gehen wir nur auf die Funktionsweise und Steuerung der Skelettmuskulatur ein.

Eine schematische Darstellung vom Aufbau eines Skelettmuskels ist in Abb. 2.2 gezeigt. Ein Skelettmuskel (wie z.B. der Bizeps) ist über Sehnen (tendons) am Knochen befestigt. Bei Anspannung zieht sich der Muskel zusammen und bewegt so den Körper mittels Hebelgesetz. Ein Muskel besteht aus mehreren Faserbündeln (fascicles), welche wiederum aus vielen Muskelfasern (muscle fibers) zusammengesetzt sind. Eine Muskelfaser ist eine dünne, bis zu 15 cm lange Zelle, welche aus fadenförmigen Eiweissstrukturen, den sogenannten Myofibrillen, besteht. Die Myofibrillen setzen sich aus Sakromeren, d.h. kurzen Elementen von ca. $2.3 \mu\text{m}$ Länge, zusammen. Die Anordnung der Sakromere führt zu einer charakteristischen Querstreifung der Muskelfaser, welche unter dem Mikroskop sichtbar ist (deshalb der Name „quergestreifte Muskulatur“). Das Sakromer besteht aus dicken Myosin- und dünnen Actinfilamenten, welche ineinander greifen (Abb. 2.2 unten). Die Anspannung der Muskelfaser wird erzeugt, indem sich die beweglichen Myosinköpfe (myosin heads) am Actinfilament hochziehen. Auf diese Weise verschieben sich die feinen Eiweissstrukturen ineinander und verkürzen so die Muskelfaser. In der Folge verkürzt sich der ganze Muskel um bis zu $1/3$ seiner Länge. Das Zusammenspiel von Myosin und Actin spielt übrigens auch in der Fortbewegung von anderen Zellen eine wichtige Rolle. [Stryer95]

Die Bewegung, d.h. das Hochklettern vom Myosin am Actinstrang und damit das Zusammenziehen der Muskelfaser, wird von Kalzium-Ionen (Ca^{2+}) aktiviert, welche durch Kanäle in der Zellwand aus der Umgebungsflüssigkeit ins Zellinnere gelangen. Die elektrische Spannungsdifferenz zwischen Innen- und Aussenraum der Muskelzelle steuert das Öffnen dieser Kalzium-Kanäle. Generell sind Kalzium-Ionen in vielen

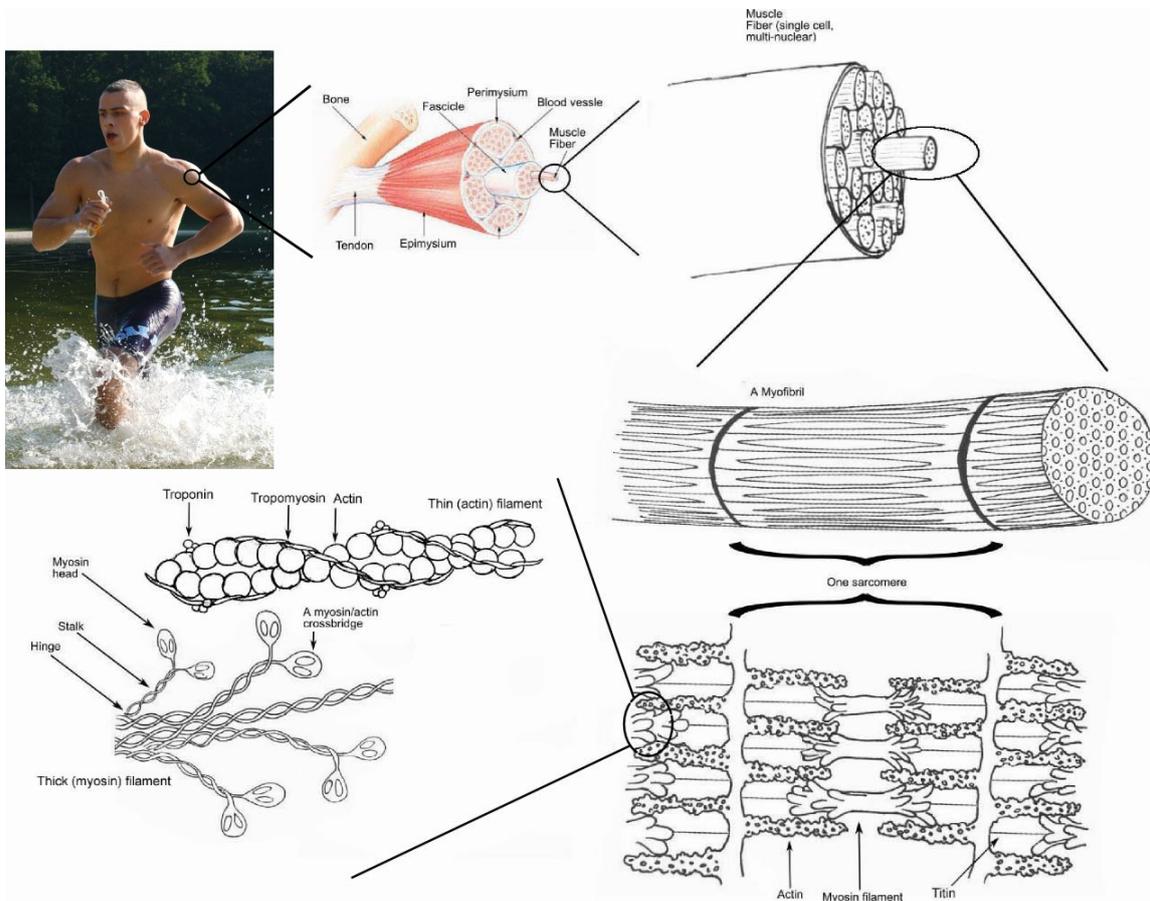


Abb. 2.2: Aufbau eines Skelettmuskels [WikiMuscle].

Zellen für die Steuerung von Stoffwechselvorgängen verantwortlich. Als nächstes betrachten wir das elektrische Signal, welches sich entlang der Nerven- und Muskelfasern ausbreitet, und dabei die Öffnung der Kalzium-Kanäle in den Zellwänden und somit das Zusammenziehen der Muskeln verursacht.

2.3 Das Aktionspotential

Motoneuronen sind Nervenzellen, welche die Kontraktion der Muskeln steuern. Die Neuronen als Impulsgeber der Skelettmuskulatur befinden sich im Rückenmark. Axone, auch Nervenfasern genannt, sind schlauchartige Vorsätze der Nervenzellen. Sie können bis zu 1 m lange werden und verbinden ein Motoneuron mit den motorischen Endplatten auf den Muskelfasern (Abb. 2.3). Der Nervenimpuls bewegt sich als elektrisches Signal, dem sogenannten Aktionspotential, entlang der Axone und der Muskelfasern fort. Wie in der Muskelaktivierung spielen auch hier spannungsgesteuerte Ionenkanäle in den Zellwänden eine zentrale Rolle. Diesen Mechanismus wollen wir als nächstes besprechen.

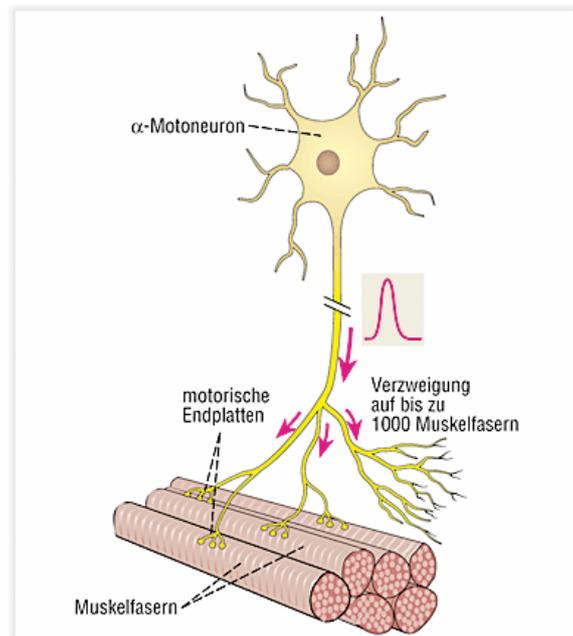


Abb. 2.3: Das Motoneuron ist über ein baumartiges Axon via motorische Endplatten mit den Muskelfasern verbunden. [Go106]

Im Ruhezustand herrscht zwischen dem Innenraum eines Axons und seiner Umgebung eine Spannungsdifferenz von ca. -70 mV . Dieses Potential wird im Wesentlichen durch das Verhältnis der Konzentrationen von Kalium-Ionen (K^+) inner- und außerhalb der Zelle bestimmt. Die Spannungsdifferenz wird durch Ionenpumpen konstant gehalten. Weiter gibt es in den Zellwänden Ionenkanäle, welche selektiv Natrium-Ionen (Na^+) von aussen ins Zellinnere oder Kalium-Ionen (K^+) von innen nach aussen durchlassen. Die Durchlässigkeit dieser Kanäle wird von der Spannungsdifferenz gesteuert. Die zeitliche Abfolge eines Nervenimpuls (Aktionspotential) ist in Abb. 2.4 illustriert: Sobald das Potential einen Schwellwert überschreitet, der etwa 15 mV über dem Ruhepotential liegt, öffnen sich die Na^+ -Kanäle und entsprechende Ionen strömen ins Zellinnere (links oben in Abb. 2.4, blauer Bereich der Zellwand). Diese „Zündung“ oder dieses „Feuern“ führt zur *Depolarisation*, d.h. innerhalb von rund einer Millisekunde baut sich eine Spannungsspitze von ca. $+40\text{ mV}$ auf. Die Na^+ -Kanäle schliessen sich nach kurzer Zeit wieder, und die K^+ -Kanäle öffnen und schliessen etwas zeitverzögert (Abb. 2.4 links, grüner Bereich). Wegen der nunmehr positiven Spannungsdifferenz strömen jetzt Kalium-Ionen aus dem Zellinneren heraus und die Spannung fällt wieder ab; diese Phase wird *Repolarisation* genannt. Das Potential unterschießt in der Folge die Ruhelage und erreicht diese nach einigen Millisekunden wieder (Abb. 2.4 links, roter Bereich).

Auf diese Weise setzt sich der Spannungsimpuls längs des Axons mit einer Geschwindigkeit von bis zu 100 m/s fort. Zum Vergleich: Die Geschwindigkeit eines elektrischen Signals in einem Kupferkabel liegt bei etwa 50% der Lichtgeschwindigkeit oder

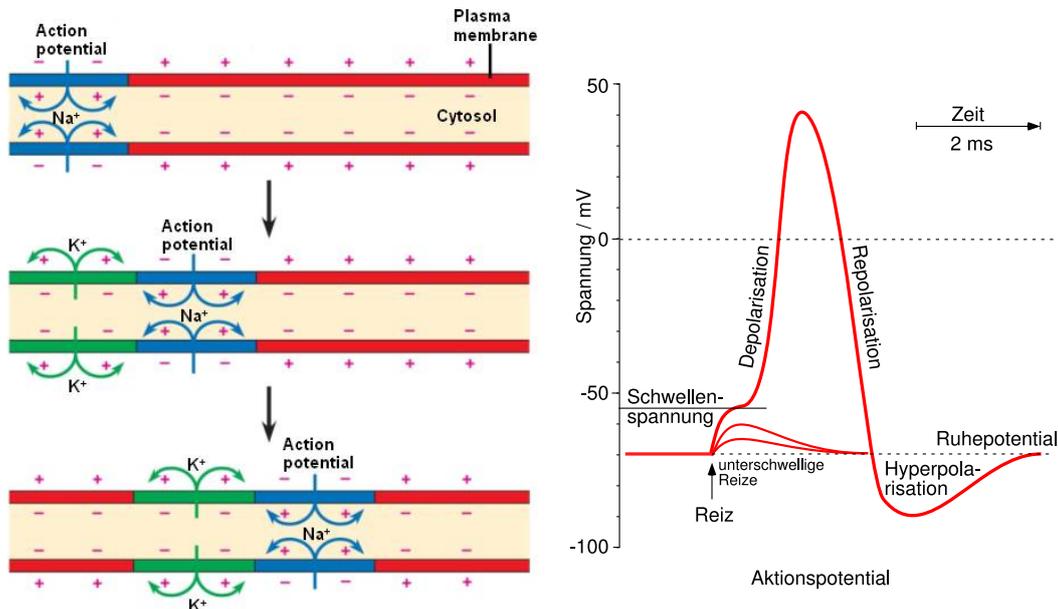


Abb. 2.4: Entstehung des Aktionspotentials und seine Fortpflanzung entlang des Axons. Das gleiche Prinzip gilt für Muskelzellen. Links: Schematische Darstellung eines Axons und seiner elektrischen Ladungsverteilung während eines durchlaufenden Aktionspotentials [AP]. Rechts: Spannungsverlauf an einem Punkt im Inneren der Zelle [WikiAP].

ca. $2 \cdot 10^8$ m/s. Obwohl es sich in beiden Fällen um ein elektrisches Signal handelt, ist der Mechanismus vollkommen verschieden. Zu unterstreichen ist, dass das Feuereine Aktionspotentials eine binäre (ja/nein) Nachricht ist: Sobald ein externer Stimulus (z.B. die Nervenzelle) den Schwellwert erreicht, wird das Aktionspotential ausgelöst und in eine Richtung weitergeleitet.

Der Nervenimpuls erreicht die Muskelfaser an einer motorischen Endplatte (Abb. 2.3), welche aus chemischen Synapsen bestehen. Hier findet die Übertragung vom Signal auf die Muskelzelle chemisch und nicht elektrisch statt, via den Neurotransmitter *Acetylcholin*. Der Neurotransmitter wird von der Synapse ausgeschüttet und löst in der Muskelzelle wiederum ein Aktionspotential aus, welches sich in gleicher Weise mittels Ionenkanälen entlang der Muskelfaser fortbewegt. Im Unterschied zum Axon liegt in Muskelfasern das Ruhepotential im Betrag etwas höher (bei ca. -90 mV). In der Zellwand der Muskelfaser befinden sich zusätzlich Ionenkanäle für Kalzium, welche sich bei durchlaufendem Aktionspotential öffnen. Wie oben besprochen verursachen die einströmenden Ca^{2+} -Ionen in der Folge die Kontraktion der Muskelfasern.

2.4 Summenaktionspotential

In der Elektromyographie wird das Aktionspotential der Muskelzellen im Gewebe gemessen. Mit Hilfe von Nadeln kann dieses direkt an der Muskelfaser oder sogar am Axon abgegriffen werden. Allerdings ist diese Methode invasiv. Einfacher ist es, die Messung mit Elektroden auf der Hautoberfläche durchzuführen (Oberflächenmyographie). Das gemessene myoelektrische Signal (EMG-Signal) ist dann eine Überlagerung von durch das Gewebe gedämpften und verzerrten Aktionspotentialen verschiedener Muskelfasern. Diese Überlagerung wird auch *Summenaktionspotential* genannt. Faserbündel werden zwar annähernd synchron durch den Nervenimpuls angesprochen. Bei ihrer Übertragung durch das Gewebe werden die Aktionspotentiale der einzelnen Muskelfasern aber in vielfältiger Weise verändert. Folgende Effekte kann man anführen:

- Retardierung: Bis zur EMG Sonde legen die Signale unterschiedliche Distanzen zurück. Dadurch sind sie zeitlich zueinander verschoben.
- Streckung: Verschiedene Gewebearten werden durchquert. Dadurch erfahren die Signale unterschiedliche zeitliche Streckungen.
- Abschwächung: Die Signale erfahren unterschiedliche Dämpfung (Abschwächung der Amplitude).

Trotz dieser komplizierten Einflüsse und Effekte können aus einem Oberflächen-EMG nützliche Informationen über die Muskelaktivität gewonnen werden. Ein Beispiel für ein gemessenes EMG-Signal ist in Abb. 2.5 gezeigt.

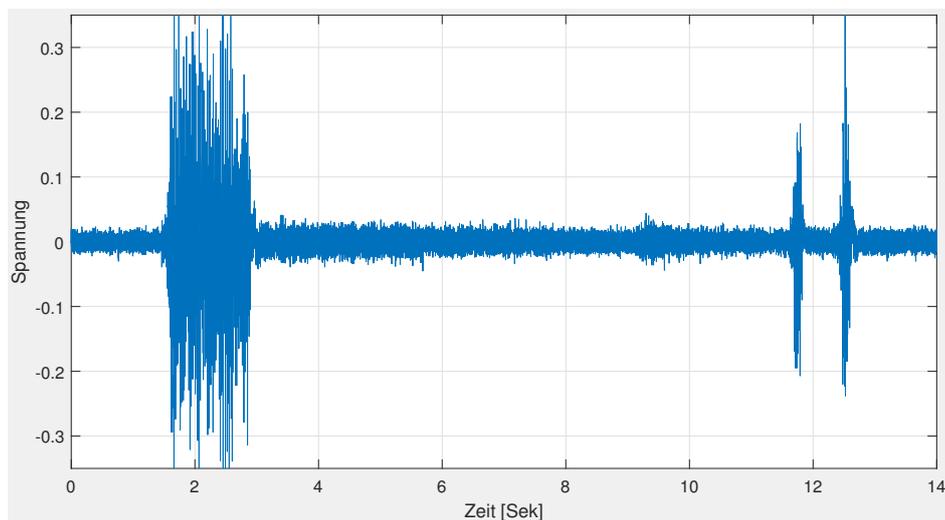


Abb. 2.5: Gemessenes Oberflächen-EMG-Signal (Beispieldaten aus [BioSSPy15]). Der betreffende Muskel spannt sich zuerst während rund einer Sekunde; später folgen zwei kürzere Aktivitäten.

Kapitel 3

Mathematischer Inhalt

3.1 Signale und Rauschen

Leitfrage: *Wie kann auf Grund des hochfrequenten Oberflächen-EMG-Signal entschieden werden, zu welchem Zeitpunkt ein Muskel gespannt oder entspannt ist?*

Ein Signal s ist eine reelle Funktion auf der Zeitachse,

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

oder, in diskreten Zeitschritten,

$$\begin{aligned} s : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ j &\mapsto s_j. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Im ersten Fall spricht man von einem *zeitkontinuierlichen*, im zweiten Fall von einem *diskreten Signal*. Im diskreten Fall wollen wir hier nur Signale betrachten, welche in äquidistanten Zeitschritten der Länge Δt gemessen werden. Aus mathematischer Sicht etwas unpassend wird die Folge (s_j) als „Zeitreihe“ bezeichnet. Wir werden diese Terminologie hier nicht weiter benutzen.

Real gemessene Signale sind immer endlich. Dies bedeutet, dass das zeitkontinuierliche Signal ein Intervall $[0, T]$ als Definitionsmenge hat, während das diskrete Signal auf $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ definiert ist. T ist die Signallänge (in einer Zeiteinheit, z.B. in Sekunden), während $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl Messwerte bezeichnet ($T = N\Delta t$). Die Anzahl Messwerte pro Zeiteinheit wird als *Sampling-Frequenz* ν_{samp} bezeichnet,

$$\nu_{\text{samp}} = \frac{N}{T} = \frac{1}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Betrachten wir das gemessene EMG-Signal in Abb. 2.5. Der Grund für das hochfrequente Signal liegt einerseits darin, dass es eine Überlagerung von vielen Aktionspotentialen aus verschiedenen Muskelfasern ist. Andererseits ist es (wie jede Messung) grossem *Rauschen* ausgesetzt. Rauschen besteht aus zufällig auftretenden, schnelllebigen Variationen des Signals. Es hat nichts mit dem zu messenden Phänomen zu tun

und wird auch *weisses Rauschen* genannt. Mathematisch schreiben wir

$$s_j = z_j + dr_j, \quad (3.4)$$

wobei s_j das gemessene Signal, z_j das ausgesandte Signal und dr_j eine *Zufallsvariable* ist. „ dr_j “ symbolisiert das Rauschen, d.h. eine Zufallsvariable nimmt innerhalb einer Bandbreite zufällige Werte an. Da das Rauschen mit beiden Vorzeichen auftritt, verschwindet es im Durchschnitt: $\sum_j dr_j = 0$. Aus diesem Grund kann Rauschen im Signal durch Bildung von geeigneten Mittelwerten *ausgelöscht* oder verringert werden. Zum Beispiel hängt der Mittelwert

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_j \quad (3.5)$$

nicht vom Rauschen ab. Auf diese Weise werden wir das Rauschen zwar los, aber wir haben auch die gesamte *zeitliche Information* im Signal verloren. Ein Kompromiss, bei dem das Rauschen abgeschwächt wird und gleichzeitig eine zeitliche Information erhalten bleibt, ist der gleitende Mittelwert.

3.1.1 Gleitender Mittelwert

Der *gleitende Mittelwert* ist eine *Faltung* (oder Konvolution) des gemessenen Signals $s(t)$ mit einer geeigneten *Fensterfunktion* $w(t)$:

$$\bar{s}^w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(\tau - t) dt, \quad (3.6)$$

respektive

$$\bar{s}_k^w = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_j w_{k-j} \quad (3.7)$$

für das diskrete Signal.

Die Fensterfunktion w ist *normiert*, d.h. $\int dt w(t) = \sum_j w_j = 1$, und sie wird normalerweise *symmetrisch* gewählt: $w(-t) = w(t)$. Die Fensterfunktion wird durch ihre Fensterbreite $\sigma > 0$ charakterisiert. Im einfachsten Fall nimmt man ein rechteckiges Fenster,

$$w(t) = \begin{cases} 1/(2\sigma) & , |t| \leq \sigma \\ 0 & , |t| > \sigma. \end{cases} \quad (3.8)$$

Beliebt ist auch die Gauss'sche Glockenkurve als Fensterfunktion,

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)}. \quad (3.9)$$

Wenn wir ein Signal *in Echtzeit* verarbeiten, dann ist ein symmetrisches Fenster nicht möglich, da künftige Signalwerte noch nicht bekannt sind. In diesem Fall wird manchmal eine einseitig exponentiell abfallenden Fensterfunktionen verwendet, wie z.B.

$$w(t) = \begin{cases} \sigma^{-1} e^{-|t|/\sigma} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

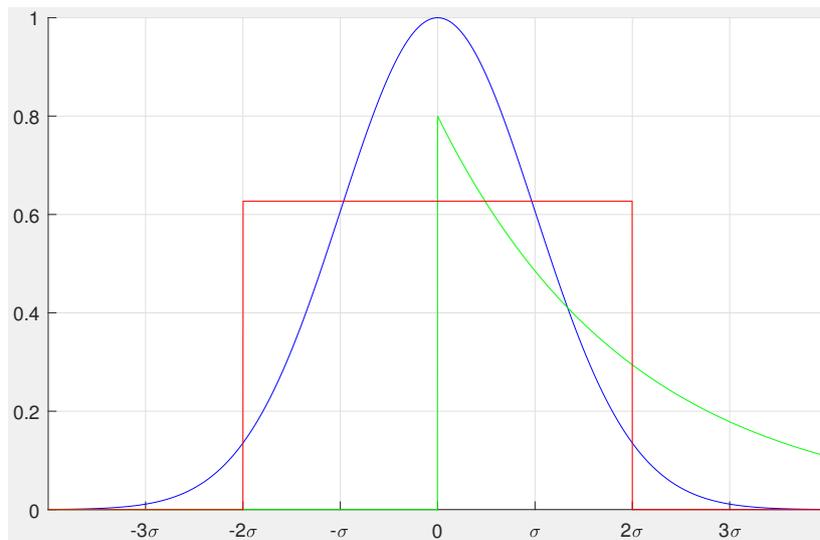


Abb. 3.1: Verschiedene Fensterfunktionen $w(t)$. Blau: Gauss'sche Glockenkurve (Breite σ). Rot: rechteckiges Fenster. Grün: einseitig exponentiell abfallendes Fenster. (Breiten 2σ)

Die vorgestellten Fensterfunktionen sind in Abb. 3.1 gezeigt.

Wie besprochen ist ein gemessenes Signal immer endlich. Das heisst, das Integral (3.6) resp. die Summe (3.7) muss irgendwann abgebrochen werden. Die Fensterbreite σ bestimmt, wie viele nebeneinanderliegende Messwerte im gleitenden Mittelwert berücksichtigt werden. Je breiter das Zeitfenster, desto mehr Messwerte werden einbezogen und desto *glatter* wird das Signal (Signalglättung). Im Limes $\sigma \rightarrow 0$ erhält man das ursprüngliche Signal. Für $\sigma \rightarrow \infty$ kommt der Mittelwert \bar{s} als Konstante heraus. Die Fensterbreite bestimmt auch die *zeitliche Auflösung* des verarbeiteten Signals $\bar{s}^w(\tau)$.

Jede Wahl der Fensterfunktion bringt unterschiedliche Vor- und Nachteile mit sich. Der gleitende Mittelwert eignet sich unter anderem zur *Prognose* von künftigen Werten, da er innerhalb einer Zeitspanne von einigen σ nicht allzu grosse Sprünge macht.

Betrachten wir nun das EMG-Signal und wie daraus die Muskelaktivität abgeleitet werden kann. Meist wird das gemessene Signal zuerst *rektifiziert*. Dazu wird ein langfristiger Mittelwert \bar{s} abgezogen und das Resultat quadriert, d.h. $\tilde{s}_j = (s_j - \bar{s})^2$ wird berechnet. So treten nur noch positive Werte auf. Von dieser Grösse wird dann der gleitende Mittelwert berechnet. Sobald der gleitende Mittelwert einen festgelegten *Schwellwert* überschreitet, ist der Muskel als aktiv zu betrachten. (Siehe Beispiel in Abb. 3.2.)

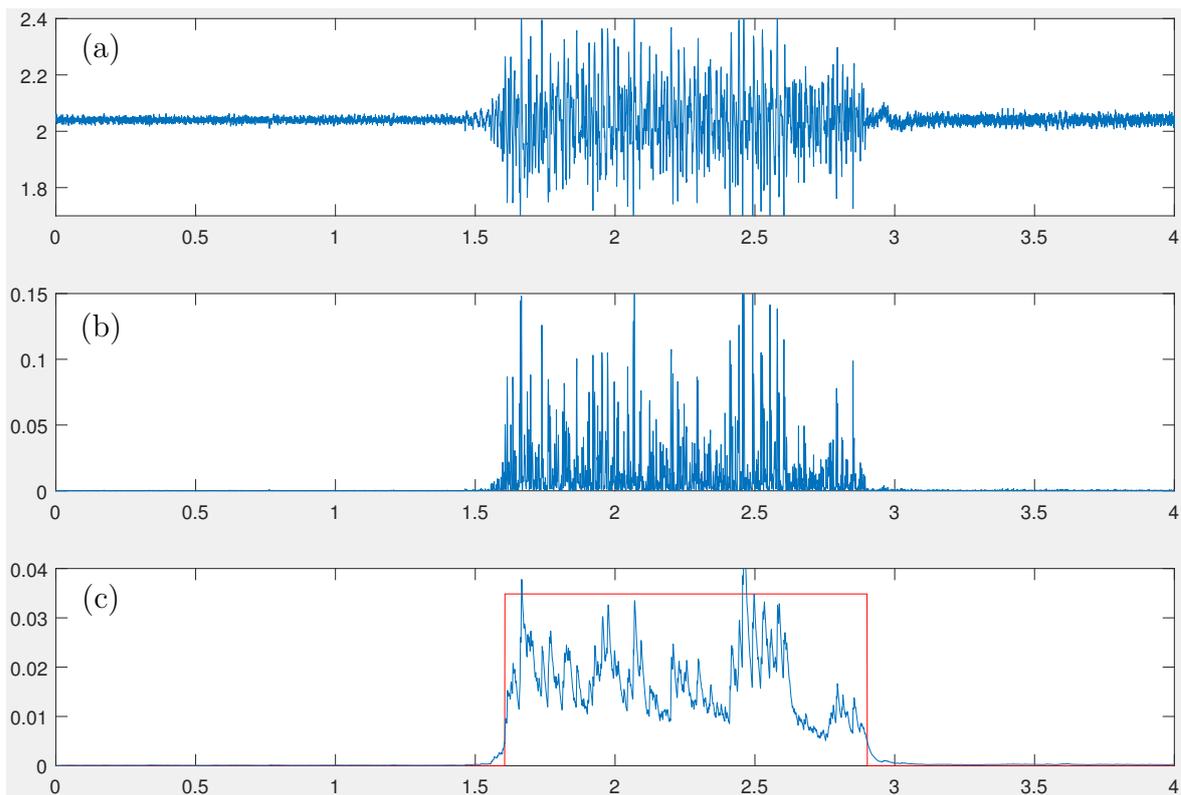


Abb. 3.2: Verarbeitung des EMG-Signals (Beispieldaten aus [BioSS-Py15]). (a) Unverarbeitetes Signal: 1000 Messungen pro Sekunde, Abszisse in Sekunden. (b) Rektifiziertes Signal: $\tilde{s}_j = (s_j - \bar{s})^2$. (c) Gleitender Mittelwert des rektifizierten Signals [einseitig exponentiell abfallende Fensterfunktion, Gl. (3.10), mit $\sigma = 20$ ms]. Rot: Muskel aktiv (d.h. der Schwellwert von 10% des Maximalwerts ist überschritten).

3.2 Frequenzanalyse

Leitfrage: *Wie erhalten wir Frequenzen und Leistungsdichte eines Signals in zeitlicher Auflösung?*

3.2.1 Fourierreihe

Oft ist es nützlich, ein Signal in seine *Fourierkomponenten* zu zerlegen und eine Frequenzanalyse zu machen, beispielsweise bei einem Ton- oder Musiksignal. Für *periodische Funktionen* kennen wir die *Fourierreihe*. Eine periodische Funktion, d.h. $f(t) = f(t + T)$, kann in Sinus- und Cosinusfunktionen zerlegt werden:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n>0} a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T). \quad (3.11)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n erhalten wir aus

$$\begin{aligned} a_{n>0} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi nt/T) dt, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi nt/T) dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Von nun an schreiben wir die Frequenzen der Fourierreihe als

$$\nu_n = n/T. \quad (3.13)$$

In komplexer Schreibweise definiert man

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 \text{ für } n \geq 0, \text{ und } c_{-n} = c_n^* \quad (3.14)$$

oder

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i \nu_n t} dt. \quad (3.15)$$

In diesen Konventionen schreibt sich die Fourierreihe nun

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i \nu_n t}. \quad (3.16)$$

Das Gewicht der Frequenzkomponenten ν_n in der Funktion $f(t)$ ist der Betrag $|c_n|$ und wird *spektrale Leistungsdichte* („power spectrum“) genannt.

Eine Fourierreihe hat abzählbar viele Frequenzen $\nu_n = n/T$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Menge $\{\nu_n\}$ nennt man auch das *Frequenzspektrum* (oder einfach *Spektrum*) der Transformation. Die physikalische Einheit (SI-Einheit) von ν_n ist Herz (Hz); (1 Hz = 1/Sekunde). Anstatt der Frequenz ν_n verwendet man oft die *Kreiszahl* $\omega_n = 2\pi\nu_n$.

3.2.2 Fouriertransformation

Ein reales Signal $s(t)$ ist meist nicht periodisch. Anders ausgedrückt, in einer Fourierreihe (3.16) für $s(t)$ kommen nicht nur die diskreten Frequenzen ν_n vor, sondern ein *Kontinuum*, $\nu \in \mathbb{R}$. Ähnlich wie beim Riemannschen Integral wird dann aus dem Summenzeichen in Gl. (3.16) ein Integral. Wir schreiben

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (3.17)$$

Die komplexe Funktion $\hat{s}(\nu)$ hat nun, falls sie existiert, eine ähnliche Bedeutung wie die Fourierkoeffizienten c_n einer periodischen Funktion: Die spektrale Leistungsdichte $|\hat{s}(\nu)|$ ist das *Gewicht* der Frequenzkomponente ν im Signal. Für ein reellwertiges Signal $s(t)$ haben wir $\hat{s}(-\nu) = [\hat{s}(\nu)]^*$.

$\hat{s}(\nu)$ nennt man die *Fouriertransformation* von $s(t)$. Wenn $s(t)$ absolut integrierbar ist, d.h. wenn $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < \infty$, so kann $\hat{s}(\nu)$ folgendermassen berechnet werden:

$$\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (3.18)$$

Gleichung (3.17) nennt man die *inverse Fouriertransformation*.

Der Begriff der Fouriertransformation kann auf Funktionen erweitert werden, welche nicht absolut integrierbar sind, d.h. wenn das Riemannsche Integral $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt$ nicht existiert [wie z.B. für $s(t) = \text{konst.}$ oder $s(t) = \sin(kt)$]. In diesem Fall ist $\hat{s}(\nu)$ keine Funktion im klassischen Sinn mehr, und der Funktionsbegriff muss im Begriff der *Verteilung* verallgemeinert werden. In der Verarbeitung von endlichen Signalen, wie sie in der Praxis vorkommen, ist diese Komplikation aber nicht von grosser Bedeutung. Aus diesem Grund wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen.

3.2.3 Endliche und diskrete Signale

Bei der Fourieranalyse eines endlichen Signals $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ muss man sich überlegen, wie $s(t)$ auf \mathbb{R} fortgesetzt werden soll. Eine natürliche Wahl ist $s(t) = 0$ für $t \notin [0, T]$. Bis auf den Vorfaktor $1/T$ wird damit aus dem Fourierintegral (3.18) die Fourierreihe (3.15). Allerdings nehmen die Frequenzen jetzt beliebige Werte an: $\nu \in \mathbb{R}$. Alternativ könnte man $s(t)$ periodisch fortsetzen, d.h. man definiert $s(t + T) = s(t)$, und wir erhalten wieder die Fourierkoeffizienten (3.15).

Wir sehen also, dass zur Spektralanalyse eines endlichen Signals der Länge T grundsätzlich das Integral (3.15) verwendet werden muss, allerdings mit reellwertigen Frequenzen ν . Welche Bedeutung haben nun die diskreten Frequenzen ν_n in ganzen Schritten von $1/T$? Heuristisch kann man folgendermassen argumentieren: Eine harmonische Schwingung der Frequenz ν im Signal kann man beispielsweise feststellen, indem die Anzahl Wellenberge gezählt werden, die im Zeitraum $[0, T]$ der Messung auftreten. Die Zeit, die zwischen zwei Wellenbergen verstreicht, nennt man die *Periode* p der Schwingung; sie ist gegeben durch $p = 1/\nu$. Die Anzahl gezählter Wellenberge ist

also $[T/p] = [T\nu]$. Wenn nun zwei Schwingungen in ihren Frequenzen sehr nahe beieinanderliegen [genauer: wenn $(\nu - \nu') < 1/T$], so wird man in beiden Fällen genau gleich viele Wellenberge zählen. Die inverse Signallänge $1/T$ definiert also die *Frequenzauflösung* der Fouriertransformation. Nur Frequenzen oder Frequenzdifferenzen grösser als $1/T$ können aufgelöst werden. Bei endlichen Signalen ist es deshalb ausreichend, die Fouriertransformation bei den diskreten (aber unendlich vielen) Frequenzen $\nu_n = n/T$ auszuwerten.

Bei einem diskreten Signal s_j ersetzen wir das Fourierintegral durch die entsprechende Riemann-Summe und erhalten so

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j e^{-2\pi i \nu_n j}, \quad (3.19)$$

wobei N die Anzahl Messwerte ist, d.h. $T = N\Delta t$ und

$$\nu_n = n/N. \quad (3.20)$$

Da wir die Zeit in der Einheit der Zeitschritte Δt gewählt haben ($t = j\Delta t$), ist hier die physikalische Einheit der Frequenzen ν_n gegeben durch die Sampling-Frequenz $\nu_{\text{samp}} = 1/\Delta t$.

Wir sehen, dass das Spektrum für das diskrete Signal s_j endlich ist, d.h. es gibt genau so viele unabhängige Frequenzen ν_n wie Messpunkte N . Aus Gl. (3.19) folgt, dass die Fourierkoeffizienten folgende Translationssymmetrie haben: $c_{n+N} = c_n$. Weiter folgt

$$c_{N/2+k} = (c_{N/2-k})^*. \quad (3.21)$$

In der spektralen Leistungsdichte $|c_n|$ führt dies zu Symmetrie unter Spiegelung an der Frequenz $\nu_{N/2} = 1/2$. Dies nennt man die *Nyquist-Frequenz*, ν_{nyq} . Benutzen wir physikalische Einheiten, so ist die Nyquist-Frequenz gerade die Hälfte der Sampling-Frequenz:

$$\nu_{\text{nyq}} = \frac{\nu_{\text{samp}}}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (3.22)$$

Es lohnt sich, diese Resultate einander gegenüberzustellen. Während die inverse Messzeit eines endlichen Signals, $1/T$, die kleinste Frequenz vorgibt die man auflösen kann, bedeutet die Sampling-Frequenz $1/\Delta t$ (resp. ν_{nyq}) die grösstmögliche Frequenz, die im Signal enthalten ist. Anders ausgedrückt muss die Periode p einer harmonischen Schwingung zwischen diesen zwei Zeitskalen liegen: $\Delta t < p < T$. Ist die Periode p der Schwingung kürzer als das Messintervall Δt oder länger als die Gesamtmesszeit T , so kann diese Information aus dem Signal nicht gewonnen werden. Der mögliche Auflösungsbereich im Frequenzraum eines diskreten und endlichen Signals liegt also zwischen zwei Frequenzen: $1/T < \nu < 1/\Delta t$.

Abb. 3.3 zeigt die spektrale Leistungsdichte für das EMG-Signal in Abb. 3.2(a); (unverarbeitetes Signal). Die Sampling-Frequenz dieser Messung liegt bei $\nu_{\text{samp}} = 1$ kHz und die Leistungsdichte ist bis zur Nyquist-Frequenz aufgezeichnet. Man sieht, dass

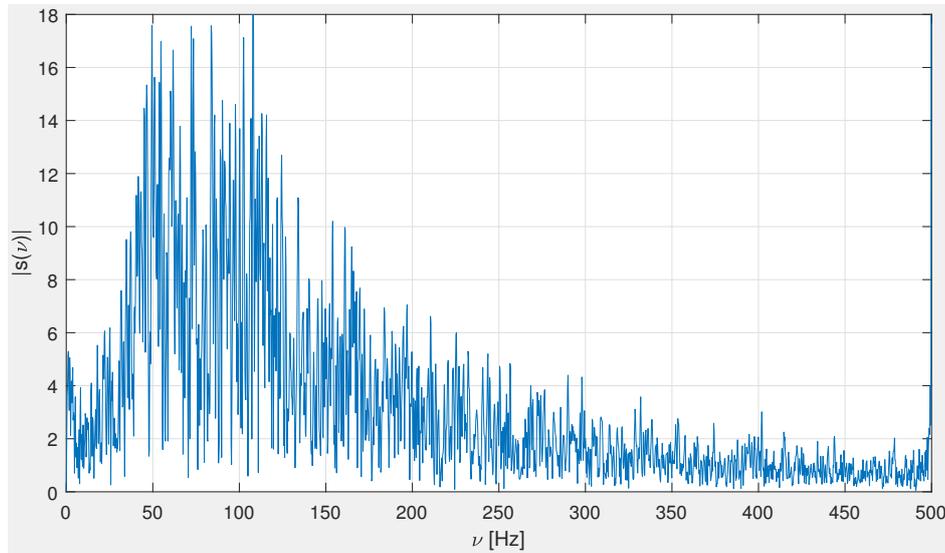


Abb. 3.3: Spektrale Leistungsdichte für das Oberflächen-EMG-Signal aus Fig. 3.2.

die maximale Leistungsdichte im Bereich von 50 bis 100 Hz liegt. Grund dafür ist eine Feuerungsrate der Axone/Muskelfasern in diesem Frequenzbereich bei gespanntem Muskel.

3.2.4 Kurzzeit Fouriertransformation

In der Fouriertransformation (3.18) oder den Fourierkoeffizienten (3.19) ist die Zeitinformation des Signals nicht mehr sichtbar. Dafür erhalten wir präzise Frequenzinformationen, d.h. wir kennen genau das Gewicht jeder Frequenz ν_n . Viele Signale sind aber *nichtstationär*, d.h. die Frequenzen ändern sich in der Zeit. In einem Musikstück möchten wir beispielsweise wissen, welcher Ton zu welchem Zeitpunkt gespielt wurde. Eine solche zeitaufgelöste Frequenzanalyse kann mit der *Kurzzeit-Fouriertransformation* geschehen. Dazu wählen wir eine Fensterfunktion $w(t)$ und transformieren das Signal innerhalb eines Zeitfensters σ ,

$$\hat{s}^w(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(\tau - t) e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (3.23)$$

Die Transformation $\hat{s}^w(\nu, \tau)$ ist eine Funktion *zweier* Variablen: Frequenz ν und Zeit τ . Eine Darstellung der Leistungsdichte $|\hat{s}^w(\nu, \tau)|$ nennt man eine Zeit-Frequenz Analyse (siehe Abb. 3.4).

Für ein diskretes endliches Signal wird die Kurzzeit-Fouriertransformation als Summe geschrieben,

$$\hat{s}_k^w(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j w_{k-j} e^{-2\pi i \nu j}. \quad (3.24)$$

Hier stellt der Parameter k die diskreten Zeitschritte der Transformation dar ($\tau = k\Delta t$). Wie beim gleitenden Mittelwert sollte die Fensterbreite σ deutlich kürzer sein als die Signallänge, $\sigma \ll T = N\Delta t$. Ist σ so gross wie T oder grösser, so wird $\hat{s}_k^w(\nu)$ zeitunabhängig und man erhält eine gewöhnliche Fouriertransformation. Grundsätzlich können die Frequenzen ν in Gl. (3.24) diskret gewählt werden und sie liegen mit einer Schrittbreite von $1/N$ im Bereich $\nu \in [0, 1)$; (in Einheiten ν_{samp}).

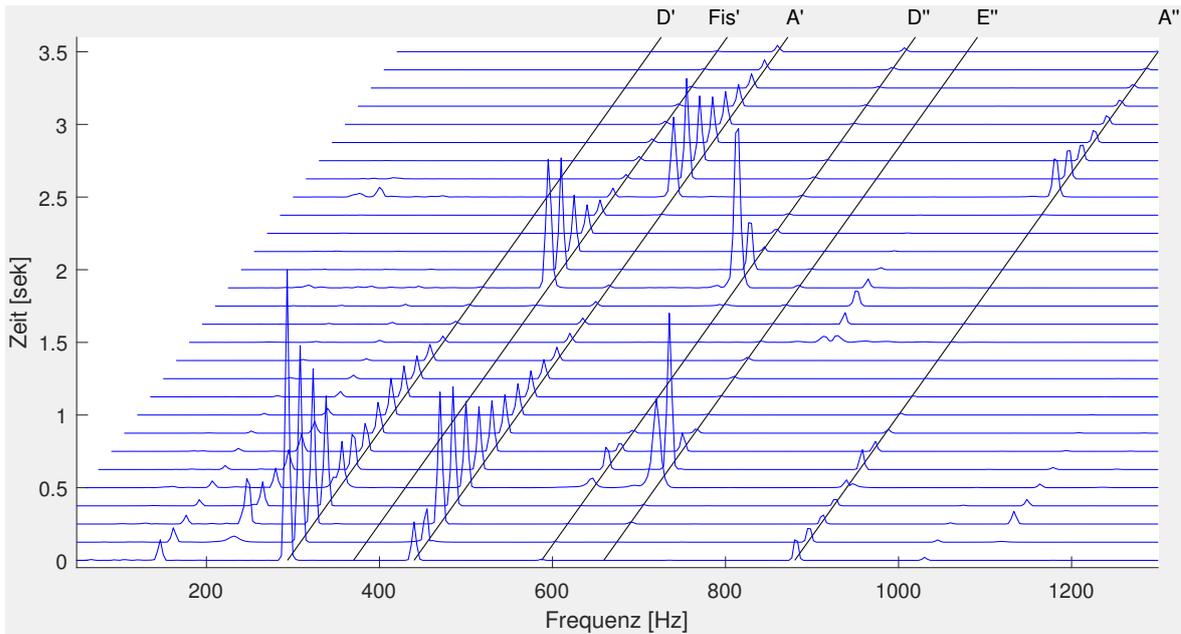


Abb. 3.4: Zeit-Frequenz Analyse mittels Kurzzeit-Fouriertransformation der ersten paar Akkorde von „Open Arms“ (Piano) [openArms]. Die Leistungsdichte $|\hat{s}^w(\nu, \tau_n)|$ ist für einige Zeitpunkte τ_n aufgetragen. Die Sampling-Frequenz des Tonsignals ist 44.1 kHz. Das Gauss'sche Zeitfenster hat eine Breite von 50 ms. Einige bekannte Frequenzen sind als schwarze Linien gezeigt: 293.7, 370, 440, 587.3, 659.3, 880 Hz, oder in Musiknoten: D', Fis', A', D'', E'', A''.

Welche Bedeutung hat die Fensterbreite σ in der Kurzzeit-Fouriertransformation? Wie im gleitenden Mittelwert bestimmt σ einerseits die *zeitliche Auflösung* $\Delta\tau$, d.h. je kleiner σ , desto genauer ist die zeitliche Eingrenzung des Frequenzspektrums. Man bemerke, dass $\bar{s}^w(\tau) = \hat{s}^w(\nu = 0, \tau)$, d.h. bei der Frequenz $\nu = 0$ entspricht die Kurzzeit-Fouriertransformation (3.23) gerade dem gleitenden Mittelwert (3.6).

Was passiert, wenn wir das Zeitfenster σ kleiner werden lassen? Einerseits wird die zeitliche Auflösung der Fourieranalyse immer besser. Andererseits finden für kleiner werdende Fensterbreiten σ aber immer weniger Frequenzen (d.h. Sinus- und Cosinus-Wellen) im Fenster Platz. Im Fall des rechteckigen Fensters können wir das gleiche

heuristische Argument anwenden, welches beim endlichen Signal in Kapitel 3.2.3 besprochen wurde. Bei anderen Fensterfunktionen ist die Situation aber ähnlich: Die Frequenzauflösung der Kurzzeit-Fouriertransformation beträgt

$$\Delta\nu \simeq 1/\sigma. \quad (3.25)$$

In (3.23) und (3.24) können somit die diskreten Frequenzen $\nu_n = n/T$ resp. $\nu_n = n/N$ verwendet werden.

Wir sehen also, dass die zeitliche Auflösung $\Delta\tau \simeq \sigma$ und die Frequenzauflösung $\Delta\nu \simeq 1/\sigma$ nicht unabhängig voneinander gewählt werden können. Wollen wir eine genaue zeitliche Auflösung, so wird die Frequenzauflösung schlecht, und umgekehrt. Dieser Konflikt zwischen zeitlicher Auflösung und Auflösung im Frequenzraum ist nicht auf die Kurzzeit-Fouriertransformation beschränkt. Die *Heisenbergsche Unschärferelation* besagt, dass die zeitliche Auflösung $\Delta\tau$ und die Frequenzauflösung $\Delta\nu$ einer Zeit-Frequenz Analyse umgekehrt proportional zueinander sind:

$$\Delta\tau\Delta\nu \gtrsim 1. \quad (3.26)$$

Wie gross die Unschärfen $\Delta\tau$ und $\Delta\nu$ in einer konkreten Anwendung sind, hängt u.a. von der gewählten Fensterfunktion ab. Das Produkt $\Delta\tau\Delta\nu$ kann den Wert 1 aber nie unterschreiten. Die Wahl einer Fensterfunktion bedeutet deshalb immer einen Kompromiss zwischen Auflösung in Zeit und Auflösung in Frequenz. Diese bestimmt das *Auflösungsfenster* ($\Delta\tau, \Delta\nu$) der Kurzzeit-Fouriertransformation.

Eine einfache rechteckige Fensterfunktion hat den Nachteil, dass Diskontinuitäten in das Signal einführt werden. Dies kann zu Artefakten in der Zeit-Frequenz Analyse führen, welche das ursprünglichen Signal verfälschen (Ein Effekt, der „Ringing“ genannt wird). Oft wird als Fensterfunktion die Gauss'sche Glockenkurve (3.9) verwendet. Eine solche Kurzzeit-Fouriertransformation ist nach dem Mathematiker *Dennis Gabor* benannt („Gabor-Transformation“). Nachteilig ist, dass diese Fensterfunktion einen unendlichen Träger hat [d.h. $w(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$]. Jedoch kann das Integral resp. die Summe auf das Intervall $[-2\sigma, 2\sigma]$ beschränkt werden, da die Werte von $w(t)$ ausserhalb dieses Bereichs äusserst klein sind (siehe Abb. 3.1). Die Gabor-Transformation hat den Vorteil eines optimalen Zeit-Frequenz Auflösungsfensters ($\Delta\tau\Delta\nu \simeq 1$). Verschiedene weitere Fensterfunktionen werden in der Kurzzeit-Fourieranalyse verwendet und haben je nach Signaltyp andere Vor- und Nachteile.

3.3 Wavelets

Im letzten Kapitel wurde besprochen, dass eine Zeit-Frequenz Analyse immer ein gewisses Auflösungsfenster $(\Delta\tau, \Delta\nu)$ hat, dessen Fläche $\Delta\tau\Delta\nu$ gegen unten beschränkt ist. Bei der Kurzzeit-Fouriertransformation ist diese Auflösung konstant für alle Frequenzbereiche ν und zu jedem Zeitpunkt τ . Insbesondere die fest gewählte Frequenzauflösung $\Delta\nu$ bedeutet für einige Anwendungen aber einen Nachteil: Sehr langsame Signaländerungen auf einer Zeitskala grösser als σ (d.h. kleine Frequenzen $\nu < 1/\sigma$) gehen in der Zeit-Frequenz Analyse verloren. Kleine Frequenzen werden durch die Kurzzeit-Fouriertransformation aus dem Signal gelöscht und sind nicht sichtbar.

Für grosse Frequenzen ν fällt die Auflösung $\Delta\nu$ nicht so stark ins Gewicht. Aber für kleine Frequenzen $\nu \simeq 0$ explodiert die *relative Auflösung* $\Delta\nu/\nu$. Mit der Wavelet-Transformation sucht man eine Zeit-Frequenz Analyse, bei der $\Delta\nu/\nu$ einen bestimmten Wert annimmt. Das heisst, man möchte eine Auflösung $\Delta\nu$, die für kleiner werdende Frequenzen ν immer besser wird. Gemäss der Heisenbergschen Unschärferelation (3.26) wird dabei die zeitliche Auflösung $\Delta\tau$ entsprechend schlechter (d.h. $\Delta\tau \gtrsim 1/\nu$).

Die *stetige Wavelet-Transformation* [wt10] einer Funktion $f(t)$ ist

$$\hat{f}_\psi(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) dt. \quad (3.27)$$

Hier ist $\tau \in \mathbb{R}$ eine Zeitvariable. Die komplexe Funktion $\psi_s(t; \tau) = \psi((\tau - t)/s)$ ist ein *Wavelet* und $\psi(t)$ wird das entsprechende *Mutter-Wavelet* genannt. Ihr Betrag $|\psi(t)|$ ist eine bei $t = 0$ lokalisierte, kurzlebige Welle [deshalb der Name Wavelet (engl.) = *kleine Welle*], welche gewisse Bedingungen erfüllen muss, damit das Integral (3.27) existiert. Insbesondere muss sie *normiert* sein, $\int |\psi(t)|^2 dt = 1$, und im Mittel verschwinden, $\int \psi(t) dt = 0$. Wegen seiner Lokalität übernimmt ψ eine ähnliche Rolle wie die Fensterfunktion in der Kurzzeit-Fouriertransformation (3.23). Andererseits hat ψ einen Wellencharakter und spielt zusätzlich die Rolle der Sinus- und Cosinusfunktionen.

Die Variable $s \in \mathbb{R}^+$ in (3.27) ist ein Skalenparameter oder eine *Streckung* des Mutter-Wavelets. Einerseits legt s die Fensterbreite von $|\psi(t/s)|$ fest, d.h. es entspricht dem Parameter σ in der Kurzzeit-Fouriertransformation. Anhand eines Beispiels werden wir sehen, dass s^{-1} zusätzlich die Rolle der Frequenz übernimmt. Der Vorfaktor $1/\sqrt{s}$ in (3.27) dient der korrekten Normierung: $\int |\psi((t - \tau)/s)/\sqrt{s}|^2 dt = \int |\psi(t)|^2 dt = 1$.

Oft sind wir nur an einigen Skalen s interessiert und das Signal ist diskret. In diesem Fall verwendet man die *diskrete Wavelet-Transformation*, wobei wir in (3.27) folgende Substitution machen $s \rightarrow 2^n$ und $\tau \rightarrow 2^n k$ mit $n, k \in \mathbb{Z}$. So erhalten wir eine diskrete Wavelet-Transformation der Form

$$\hat{f}_\psi(n, k) = 2^{-n/2} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \psi(2^{-n} j - k). \quad (3.28)$$

Wenn die Ausdehnung des Wavelets kleiner wird als der Zeitschritt Δt der Messung oder grösser als die gesamte Signallänge, so ergibt die Transformation keine

nützlichen Informationen mehr. Darum sind in (3.28) nur gewisse Skalen n relevant: $n = 0, 1, \dots, \log_2(N)$. In (3.28) bedeutet der Parameter 2 eine Verdoppelung respektive Halbierung der Zeit- und Frequenzskalen bei jedem Schritt n (Oktaven). Nach Bedarf kann dieser Parameter auch anders gewählt werden.

Eine Wavelet-Transformation wird durch das gewählte Mutter-Wavelet $\psi(t)$ charakterisiert. Das heisst, es gibt viele verschiedene Wavelet-Transformationen, welche je nach Anwendung und je nach Signal besser oder schlechter geeignet sind. Beispielsweise gibt es das *Haar Wavelet*, *Gabor Wavelet*, *Daubechies Wavelet*, *Symlet*, *Morlet Wavelet* etc., um nur einige zu nennen. Die Untersuchung und Entwicklung von neuen Wavelets ist ein weites und aktives Forschungsgebiet der angewandten Mathematik.

Man kann anfügen, dass die Wavelet-Transformation invertierbar ist. Dies bedeutet, dass ein Signal $f(t)$ als Summe (resp. als Integral) von verschiedenen, zeitlich gegeneinander verschobenen (Parameter τ) und gestreckten (Parameter s) Wavelets $\psi((t-\tau)/s)$ geschrieben werden kann [wt10]. Eine ähnliche Überlagerung haben wir bereits beim Summenaktionspotential in Kapitel 2.4 kennengelernt. In der Oberflächen-EMG werden die zeitlich gestauchten und gegeneinander verschobenen Aktionspotentiale der einzelnen Muskelfasern in einem Signal zusammengefasst. Wählen wir also ein Wavelet von der Form des elementaren Aktionspotentials (Abb. 2.4) und haben wir ein EMG-Signal mit genügend hoher Sampling-Frequenz zur Verfügung, so ist es im Prinzip möglich, mit Hilfe der Wavelet-Transformation die genauen Zeitpunkte der Aktivierung einzelner Muskelfasern zu ermitteln. In der Praxis wird dieses Vorgehen aber von nichtlinearen Verzerrungen im EMG-Oberflächensignal erschwert.

3.3.1 Gabor Wavelet

An dieser Stelle wollen wir das Gabor Wavelet etwas näher betrachten. Es ist gegeben durch das Mutter-Wavelet

$$\psi_{\text{gabor}}(t) = e^{-t^2/2\tau_0^2} e^{2\pi i \nu_0 t}. \quad (3.29)$$

Das Gabor Wavelet ist also eine Gauss'sche Glockenkurve, multipliziert mit einer harmonischen Schwingung. Der Parameter τ_0 bestimmt die Fenstergrösse, ν_0 die Grundfrequenz der Schwingung. Üblicherweise wird $\tau_0\nu_0 = 1$ gewählt.

Fügen wir dieses Mutter-Wavelet in (3.27) ein, so erhalten wir

$$\hat{f}_{\text{gabor}}(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\tau-t)^2/2(\tau_0 s)^2} e^{2\pi i \nu_0(\tau-t)/s} dt. \quad (3.30)$$

Man sieht, dass dies (bis auf eine komplexe Phase) der Kurzzeit-Fouriertransformation entspricht, mit einer Gauss'schen Fensterfunktion der Breite $\tau_0 s$, ausgewertet bei der Frequenz ν_0/s , d.h.

$$\hat{f}_{\text{gabor}}(s, \tau) = \exp(i\nu_0\tau/s) \hat{f}_{w[\sigma=s\tau_0]}(\nu = \nu_0/s, \tau). \quad (3.31)$$

Wie angekündigt bestimmt der Parameter s einerseits die zeitliche und die Frequenzauflösung mittels Fensterbreite $[\Delta\tau \simeq s\tau_0, \Delta\nu \simeq 1/\Delta\tau]$. Andererseits bestimmt s

auch die Frequenz ($\nu = \nu_0/s$). Daraus sehen wir, dass die relative Frequenzauflösung $\Delta\nu/\nu = 1/(\nu_0\tau_0)$ der Wavelet-Transformation konstant ist.

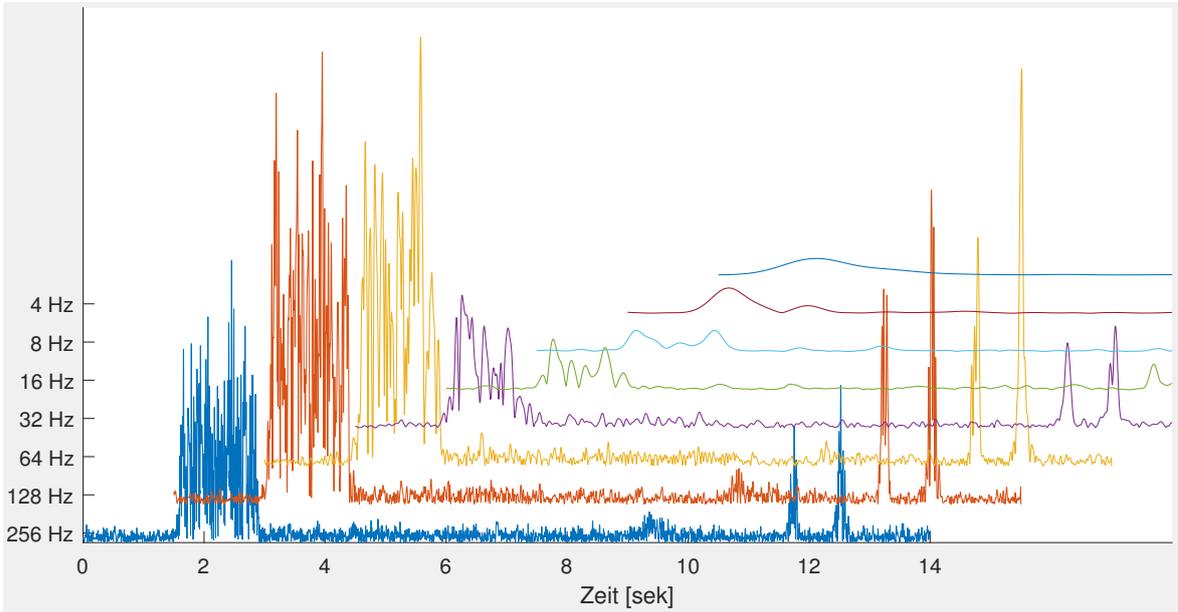


Abb. 3.5: Die diskrete Wavelet-Transformation des EMG-Signals in Abb. 2.5. Das Gabor Wavelet (3.30) wurde verwendet, mit einer Grundfrequenz $\nu_0 = 265$ Hz und bei den Skalen $s = 2^j, j = 0, \dots, 6$. Gezeigt ist die spektrale Leistungsdichte $|\hat{f}_{\text{gabor}}(s, \tau)|$.

Die Wavelet-Transformation spielt beispielsweise bei Signalen eine wichtige Rolle, für die man den interessanten Frequenzbereich nicht zum voraus kennt. Ist der Frequenzbereich bekannt (wie z.B. bei einem Tonsignal), so kann Frequenzauflösung und Fensterbreite entsprechend gewählt werden, und die Kurzzeit-Fouriertransformation genügt. Sind die interessanten Skalen nicht bekannt, so kann die Wavelet-Transformation ein hilfreiches Werkzeug sein. Aus diesem Grund wird die Signalanalyse mit Wavelets auch *Multiskalenanalyse* genannt.

In Abb. 3.5 ist eine Zeit-Frequenz Analyse mittels Wavelet-Transformation (Gabor) vom EMG-Signal in Abb. 2.5 gezeigt. Wir sehen, dass die grösste spektrale Leistungsdichte bei aktivem Muskel in einem breiten Frequenzbereich von 64 bis 128 Hz liegt. Bei der Nyquist-Frequenz von 500 Hz ist die Intensität über den gesamten Zeitraum verteilt (nicht gezeigt).

Literatur

- [WikiExo] [https://de.wikipedia.org/wiki/Exoskelett_\(Maschine\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Exoskelett_(Maschine)).
- [Cyb] <http://www.cybathlon.ethz.ch>.
- [BR] <https://www.beyond-robotics.com>.
- [HB17] Beyond Robotics GmbH. *EduExo – The Robotic Exoskeleton Kit (Handbook and Tutorial)*. 2017.
- [ME17] Beyond Robotics GmbH. *EduExo – Muscle Control Extension*. 2017.
- [WikiGalv] <https://de.wikipedia.org/wiki/Galvanismus>.
- [WikiMuscle] <https://de.wikipedia.org/wiki/Skelettmuskel>.
- [Stryer95] Lubert Stryer u. a. *Biochemistry*. W.H. Freeman, 1995. ISBN: 9780716720096.
- [Gol06] Klaus Golenhofen. *Basislehrbuch Physiologie*. München: Elsevier, Urban & Fischer, 2006.
- [AP] <http://physiologyplus.com/propagationconduction-of-action-potential>.
- [WikiAP] https://en.wikipedia.org/wiki/Action_potential, <https://de.wikipedia.org/wiki/Aktionspotential>.
- [BioSSPy15] Carlos Carreiras u. a. *BioSPPy: Biosignal Processing in Python*. (2015; access 1.9.2018). URL: <https://github.com/PIA-Group/BioSPPy/>.
- [openArms] <https://www.youtube.com/watch?v=Zdewv4JBBSI>.
- [wt10] Yulong Sheng. „Wavelet Transform“. *Transforms and Applications Handbook* (2010), S. 10.1 –10.53.

Auf alle Web-Seiten und online Ressourcen wurden am 1. Sept. 2018 zugegriffen.

Anhang A

Unterrichtsmaterial

A.1 Ressourcen

Zum Cybathlon sind verschiedene Kurzvideos der ETH vorhanden. Beispielsweise könnte der Trailer vom Cybathlon 2016 im Unterricht gezeigt werden:

<http://www.cybathlon.ethz.ch/de/publikationen/videogalerie.html>

Auf der Webseite von Martin Lieberherr befindet sich ein Java-Applet, welches die Kurzzeit-Fouriertransformation von einem Tonsignal in Echtzeit berechnet:

<http://physik.li/applets/SpectrumAnalyzer>

A.2 Schüleraufgaben

Folgende Aufgabensammlung ist zur selbständigen Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler gedacht. Sie betrifft Themen, die im Hauptteil dieser Arbeit beschrieben sind.

Das *Aufgabenblatt „Gleitender Mittelwert“* [A.2.1](#) beinhaltet eine Lernaufgabe zur selbständigen Bearbeitung durch die Lernenden. In der Unterrichtssequenz kann dieses Aufgabenblatt im Anschluss an den Einführungsteil [1.3.1](#), innerhalb des zweiten Teils [1.3.2](#) eingesetzt werden.

Inhalt und Lernziele: Die Lernenden verstehen die Begriffe *gleitender Mittelwert* und *Fensterfunktion* für diskrete und zeitkontinuierliche Signale. Sie können diese auf numerische Zahlenreihen und auf Funktionen anwenden.

Voraussetzungen: Die Lernenden kennen die Begriffe *diskrete* und *zeitkontinuierliche Signale*. Sie wissen, was eine EMG-Oberflächensonde ist, und dass damit Spannungssignale gemessen werden, welche bei der Aktivierung von Muskeln auftreten. Summenschreibweisen und das Riemann-Integral sollten bekannt sein.

Bearbeitungsdauer: 2 Lektionen

Die *Übungsaufgaben* [A.2.2](#) bauen auf Stoff auf, welcher vorgängig im Unterricht eingeführt werden muss und der im Hauptteil dieser Arbeit beschrieben ist.

A.2.1 Aufgabenblatt „Gleitender Mittelwert“

Mittelwert/Durchschnitt

Sie wissen bereits, wie man eine Notendurchschnitt berechnet: Schreibt eine Schülerin beispielsweise die Noten 3.5, 5.5 und 6, so ist der Notenschnitt oder *arithmetische Mittelwert* über diese drei Prüfungen $\bar{n} = (3.5 + 5.5 + 6)/3 = 5$.

Seien N die Anzahl Prüfungen und n_j die jeweiligen Notenwerte ($j = 1, \dots, N$). Der allgemeine Ausdruck für den (arithmetischen) Mittelwert/Durchschnitt ist

$$\bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N n_j = \frac{1}{N} (n_1 + n_2 + \dots + n_N). \quad (\text{A.1})$$

Aufgabe 1: Während eines Schuljahres schreibt ein Schüler folgende Noten:

$$(n_j) = (3.5, 3, 5.5, 5, 6, 4, 4.5, 6, 5) \quad (\text{A.2})$$

Berechne den Notendurchschnitt \bar{n} über das Jahr.

$$\bar{n} =$$

Dieser Mittelwert \bar{n} über das ganze Jahr ist z.B. wichtig für die Promotion des Schülers. \bar{n} sagt aber nichts über den *Fortschritt*, d.h. den *zeitlichen Verlauf* der Schülerleistung aus: Wir können nicht sagen, ob sich der Schüler im Laufe des Jahres verbessert oder verschlechtert hat.

Gleitender Mittelwert

Um solche *Verlaufsfragen* zu beantworten, berechnet man den Mittelwert über zeitliche Teilabschnitte. Beispielsweise für das erste und das zweite Semester:

$$(n_j) = (\underbrace{3.5, 3, 5.5, 5}_{1. \text{ Semester}}, \underbrace{6, 4, 4.5, 6, 5}_{2. \text{ Semester}}) \quad (\text{A.3})$$

Aufgabe 2: Berechne die Notendurchschnitte für das erste und für das zweite Semester.

$$\bar{n}_1 =$$

$$\bar{n}_2 =$$

Hat sich die Leistung des Schülers über die Semester verbessert?

Hier wurde der Mittelwert für zwei *Zeitfenster* berechnet: Für das 1. und für das 2. Semester. Man könnte die Noten aber auch in anderen Zeitabschnitten zusammenfassen. Beispielsweise die Noten von jeweils drei hintereinander liegenden Prüfungen:

$$(n_j) = (\underbrace{3.5, 3, 5.5}_a, \underbrace{5, 6, 4}_b, \underbrace{4.5, 6, 5}_c) \quad (\text{A.4})$$

Aufgabe 3: Berechne die Mittelwerte der Noten für die drei Zeitfenster a , b und c .

$$\bar{n}_a =$$

$$\bar{n}_b =$$

$$\bar{n}_c =$$

Die Zeitfenster können auch überlappend gewählt werden, wie zum Beispiel

$$(n_j) = (\underbrace{3.5, 3}, \underbrace{5.5, 5}, \underbrace{6, 4}, \underbrace{4.5, 6, 5}) \quad (\text{A.5})$$

Eine solche Folge von Durchschnittswerten nennt man *gleitender Mittelwert* (oder gleitender Durchschnitt). Für eine Fensterbreite $\sigma \in \mathbb{N}$ lautet der allgemeine Ausdruck dazu

$$\bar{n}_k^\sigma = \frac{1}{\sigma} \sum_{l=k-\sigma+1}^k n_l = \frac{1}{\sigma} (n_{k-\sigma+1} + n_{k-\sigma+2} + \dots + n_k). \quad (\text{A.6})$$

Am Rand der Folge muss man aufpassen: Hier wurde der gleitende Mittelwert \bar{n}_k^σ nur für $k = \sigma, \dots, N$ definiert.

Aufgabe 4: Berechne den gleitenden Mittelwert (A.6) der Noten in Gl. (A.5) für die Fensterbreite $\sigma = 4$.

$$(\bar{n}_k^{\sigma=4}) =$$

Im gleitenden Mittelwert werden extreme Ausschläge (z.B. eine sehr gute oder eine sehr schlechte Note) ausgeglichen. Die so erhaltene Zahlenfolge macht kleinere Sprünge, d.h. sie wird „glatter“. Der gleitende Mittelwert wird deshalb zur *Signalglättung* verwendet.

Gleitender Mittelwert mit Gewichtung

Manchmal ist es sinnvoll, die Zahlenwerte (hier: die Noten) im Fenster unterschiedlich zu gewichten. Man möchte beispielsweise Werte am unteren Rand des Fensters weniger stark einfließen lassen als Werte am oberen Rand. So haben zeitlich weiter zurückliegende Noten einen kleineren Einfluss als jüngere Noten und der (gewichtete) gleitende Mittelwert reagiert schneller auf Veränderungen. Eine einfache lineare Gewichtung ist z.B.

$$\bar{n}_k^{\text{lin-3}} = \frac{1}{6} (n_{k-2} + 2n_{k-1} + 3n_k). \quad (\text{A.7})$$

Hier wurden die Noten im Fenster mit 1, 2 und 3 gewichtet. Die Summe der Gewichte (1, 2, 3) muss im Vorfaktor $1/6 = 1/(1+2+3)$ enthalten sein.

Allgemein sind die Gewichte im gleitenden Mittelwert Zahlen w_k mit Index $k \in \mathbb{Z}$. Den gewichteten gleitenden Mittelwert schreibt man dann

$$\bar{n}_k^w = \frac{\sum_{l=1}^N n_l w_{k-l}}{\sum_l w_{k-l}} = \frac{n_1 w_{k-1} + n_2 w_{k-2} + \dots + n_N w_{k-N}}{w_{k-1} + w_{k-2} + \dots + w_{k-N}}. \quad (\text{A.8})$$

Die Gewichte w_k können wir als Funktion auffassen:

$$\begin{aligned} w : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k &\mapsto w_k, \end{aligned} \tag{A.9}$$

wobei viele Funktionswerte verschwinden ($w_k = 0$). w_k nennt man eine *Fensterfunktion*.

Die Fensterfunktion w_k bestimmt also die Gewichtung der Zahlenwerte n_k im gleitenden Mittelwert \bar{n}_k^w . Gleichungen (A.6) und (A.7) sind Spezialfälle von (A.8). In (A.6) haben wir $w_k = 1$ für $k = 0, \dots, \sigma - 1$, andernfalls $w_k = 0$. Dies nennt man ein „rechteckiges Zeitfenster“ oder eine „rechteckige Fensterfunktion“. In Beispiel (A.7) haben wir $w_0 = 3$, $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, und $w_k = 0$ für $k > 2$ und $k < 0$.

Aufgabe 5: Ein gleitender Mittelwert sei gegeben durch

$$\bar{n}_k^w = \frac{1}{6}(n_{k-3} + n_{k-2} + 2n_{k-1} + 2n_k). \tag{A.10}$$

Bestimme die Fensterfunktion w_k , welche hier benutzt wird.

$$\begin{aligned} w_0 &= \\ w_1 &= \\ w_2 &= \\ w_3 &= \\ w_k &= \qquad \qquad \text{für } k > 3 \text{ und für } k < 0. \end{aligned}$$

Verarbeitung des EMG-Signals

Betrachten wir nun das elektromyographische Signal einer Oberflächensonde zur Bestimmung der Muskelaktivität. Gegeben sei folgendes EMG-Signal:

$$(s_j) = (1, -1, 1, -1, 3, -1, 2, -3, -1, 0, 1, -1) \tag{A.11}$$

Das Ziel ist die Bestimmung der Zeitpunkte von An- und Entspannung des Muskels. Aus dem unverarbeiteten Signal (A.11) ist dies direkt nur schwer ablesbar. Zur Verarbeitung wird das Signal zuerst *rektifiziert*, d.h. von den Messwerten s_j wird der Mittelwert \bar{s} abgezogen und das Resultat quadriert:

$$s_j^{\text{rect}} = (s_j - \bar{s})^2. \tag{A.12}$$

Aufgabe 6: Rektifiziere das EMG-Signal in Gl. (A.11).

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \\ (s_j^{\text{rect}}) &= \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Bestimme den Mittelwert vom rektifizierten Signal.

$$\overline{s^{\text{rect}}} =$$

Damit kurzfristige Signaländerungen (Fluktuationen) geglättet werden, wird vom rektifizierten EMG-Signal ein gleitender Mittelwert berechnet.

Aufgabe 8: Bestimme den gleitenden Mittelwert vom rektifizierten Signal s_j^{rect} . Verwende dazu ein rechteckiges Fenster (A.6) der Breite $\sigma = 3$.

$$\begin{aligned} (\overline{s_k^{\text{rect}}})^\sigma &= \\ (\sigma = 3; k = 3, \dots, N) \end{aligned}$$

Der Muskel kann als angespannt betrachtet werden, sobald der gleitende Mittelwert des rektifizierten EMG-Signals den langfristigen Mittelwert überschreitet, d.h.

$$\text{Muskel gespannt} \Leftrightarrow \overline{s_k^{\text{rect}}}^\sigma > \overline{s^{\text{rect}}}. \quad (\text{A.13})$$

Aufgabe 9: Bestimme die Zeitpunkte k_n der Muskelanspannung und der Muskelentspannung aus der Bedingung (A.13) für das EMG-Signal (A.11).

Zeitkontinuierliches Signal

Als nächstes betrachten wir ein *zeitkontinuierliches* Signal. Das könnte z.B. eine Temperaturmessung $\theta(t)$ oder die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ eines Fahrzeugs sein. Im zeitkontinuierlichen Fall werden die Mittelwerte zu Riemannschen Integralen. Betrachten wir vorerst den einfachen (d.h. nicht gleitenden) Mittelwert. Die Signallänge eines diskreten Signals ist gegeben durch $T = N\Delta t$, wobei N die Anzahl Messwerte und Δt die Zeit zwischen zwei nachfolgenden Messungen ist. Der Mittelwert (A.1) kann also geschrieben werden als

$$\bar{s} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N s_j \Delta t. \quad (\text{A.14})$$

Nun lassen wir die Messlücken Δt kleiner und kleiner werden und die Anzahl Messungen N entsprechend grösser, wobei die Signallänge $T = N\Delta t$ konstant bleibt. So nähern wir uns dem Mittelwert \bar{s} des zeitkontinuierlichen Signals $s(t)$ an $[s_j = s(t_0 + j\Delta t)]$:

$$\bar{s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j = \frac{1}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N s_j \Delta t = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt. \quad (\text{A.15})$$

Hier ist t_0 die Startzeit der Messung. Der Mittelwert eines zeitkontinuierlichen Signals ist also die Fläche unter der Kurve $s(t)$ von t_0 bis t_0+T , geteilt durch die Signallänge T .

Aufgabe 10: Nehmen wir an, die Temperatur einer Flüssigkeit θ steige linear, von θ_0 auf θ_1 in der Zeit T , an. Die Temperatur folgt also dem Gesetz $\theta(t) = \theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0)/T$. Wie gross ist die durchschnittliche Temperatur im Zeitintervall $[0, T]$?

$$\bar{\theta} =$$

Aufgabe 11: Ein Auto beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 7.6 Sekunden. Wie gross ist seine mittlere Beschleunigung? (in m/s^2)

$$\bar{a} =$$

Ähnlich wie der einfache Mittelwert (A.1) kann auch der *gleitende* Mittelwert (A.8) auf zeitkontinuierliche Signale erweitert werden. Der Ausdruck dafür lautet

$$\bar{s}^w(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(\tau - t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt}. \quad (\text{A.16})$$

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man eine *Fensterfunktion*. Für grosse Argumente $|t|$ verschwindet $w(t)$ oder wird sehr klein. Deshalb ist die Wahl der Integrationslimiten (Messbereich) in (A.16) nicht sehr wichtig. Die Fensterfunktion wird oftmals normiert und symmetrisch gewählt, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = 1$ und $w(-t) = w(t)$. Die Form von $w(t)$ bestimmt die Gewichtung der Werte im Fenster. Im folgenden betrachten wir den einfachsten Fall einer *symmetrischen rechteckigen Fensterfunktion* der Breite 2σ :

$$w^{\text{rec}}(t) = \begin{cases} 1/(2\sigma), & \text{wenn } t \in [-\sigma, \sigma], \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Aufgabe 12: Berechne den gleitenden Mittelwert $\bar{s}^w(\tau)$ mit der symmetrischen rechteckigen Fensterfunktion der Breite 2σ , (A.17), für folgende zeitkontinuierliche Signale.

(a) $s(t) = \text{konst.} = s_0$.

(b) $s(t) = \exp(-t/t_0)$.

(c) $s(t) = \sin(2\pi\nu t)$.

Welche Form hat $\bar{s}^w(\tau)$ in diesem Fall, wenn $2\pi\nu\sigma \in \mathbb{N}$?

Wie verhält sich $\bar{s}^w(\tau)$ bei grossen Frequenzen ν , d.h. wenn $\nu \gg \sigma^{-1}$?

[Verwende zur Vereinfachung $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$]

A.2.2 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Rigor mortis).

In der Totenstarre (Rigor mortis) versteift sich die Muskulatur einige Stunden nach dem Tod. Was ist der Grund für die Totenstarre?

Aufgabe 3.

Bestimme die Fourierreihe der Funktion $f(t) = [\sin(t)]^2$. Was ist die (kleinste) Periode von $f(t)$?

Aufgabe 4.

Berechne die Fourierkoeffizienten c_n der periodischen Rechtecks-Funktion,

$$f(t) = \begin{cases} +1 & , -T/2 < t \leq 0, \\ -1 & , 0 < t \leq T/2 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

und $f(t+T) = f(t)$. Schreibe $f(t)$ als Fourierreihe.

Aufgabe 5.

Berechne die Fourierkoeffizienten c_n der Sägezahn-Funktion, $f(t) = |t|$ für $t \in [-1, 1)$ und $f(t+2) = f(t)$.

Aufgabe 6.

- Berechne die Kurzzeit-Fouriertransformation $\hat{f}_w(\nu, \tau)$ für das komplexe Signal $f(t) = \exp(i\omega t)$. Wähle eine rechteckige Fensterfunktion der Breite σ .
- Bei welcher Frequenz ν nimmt die spektrale Leistungsdichte $|\hat{f}_w(\nu, \tau)|$ den grössten Wert an?
- Wie erhalten wir aus dem Resultat (a) die Kurzzeit-Fouriertransformation der harmonischen Schwingung $g(t) = \cos(\omega t)$?

Aufgabe 7.

Das Aktionspotential aus Abb. 2.4 kann mathematisch modelliert werden als

$$s(t) = -t \exp(-\alpha t^2).$$

- Welcher Wert muss für den Parameter α gewählt werden, damit der Zeitunterschied zwischen den beiden Extrema des Aktionspotentials 2 ms beträgt?
- Das Haar-Wavelet ist definiert als

$$\psi_{\text{haar}}(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} -1 & \text{wenn } t \in [-1, 0) \\ +1 & \text{wenn } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Berechne die Wavelet-Transformation $\hat{s}_{\text{haar}}(s, \tau)$ von diesem Aktionspotential. Bei welchem Argument nimmt $|\hat{s}_{\text{haar}}(s, \tau)|$ den grössten Wert an?

A.2.3 Lösungen - Gleitender Mittelwert

Aufgabe 1: $\bar{n} = 4.72$

Aufgabe 2: $\bar{n}_1 = 4.25$, $\bar{n}_2 = 5.10$. Ja, die Leistung des Schülers ist besser geworden!

Aufgabe 3: $\bar{n}_a = 4.00$, $\bar{n}_b = 5.00$, $\bar{n}_v = 5.17$.

Aufgabe 4: $(\bar{n}_k^A) = (4.25, 4.86, 5.13, 4.88, 5.13, 4.88)$.

Aufgabe 5: $w_0 = 2$, $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, andernfalls $w_k = 0$.

Aufgabe 6: $\bar{s} = 0$; $(s_j^{\text{rect}}) = (1, 1, 1, 1, 9, 1, 4, 9, 1, 0, 1, 1)$.

Aufgabe 7: $\overline{s^{\text{rect}}} = 2.5$.

Aufgabe 8: $(\overline{s_k^{\text{rect}}^{\sigma=3}}) = (1, 1, 11/3, 11/3, 10/3, 2/3, 2/3)$.

Aufgabe 9: $k_1 = 5$, $k_2 = 10$.

Aufgabe 10: $\bar{\theta} = (\theta_1 - \theta_0)/2$.

Aufgabe 11: $\bar{a} = 3.65 \text{ m/s}^2$.

Aufgabe 12: (a) $\bar{s}^w(\tau) = s_0$. (b) $\bar{s}^w(\tau) = (t_0/\sigma)\sinh(\sigma/t_0)\exp(-\tau/t_0)$.

(c) $\bar{s}^w(\tau) = \sin(2\pi\nu\tau)\sin(2\pi\nu\sigma)/(2\pi\nu\sigma)$.

Wenn die Fensterbreite 2σ einem ganzzahligen Mehrfachen der Periode $1/\nu$ des Signals entspricht, so verschwindet der gleitende Mittelwert.

Grosse Frequenzen im Signale ($\nu\sigma \gg 1$) werden stark gedämpft.

A.2.4 Lösungen - Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Nach dem Tod können die Ionenpumpen in den Wänden der Muskelzellen das Ruhepotential nicht mehr aufrecht erhalten. Dadurch öffnen sich die Ca^+ -Kanäle und Kalzium kann einströmen. Die Myosin/Actinstränge schieben sich in der Folge ineinander und die Muskeln spannen sich an. Nach einiger Zeit (Tagen) ist der Zerfallsprozess in den Muskelzellen soweit fortgeschritten, dass sich das Myosin wieder löst.

Aufgabe 2

(a) $\bar{s}^w(\tau) = \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} s_0 dt = s_0$.

(b) $\bar{s}^w(\tau) = (t_0/\sigma)e^{-\tau/t_0}\sinh(\sigma/t_0)$.

(c) $\bar{s}^w(\tau) = \sin(2\pi\nu\tau)\sin(2\pi\nu\sigma)/(2\pi\nu\sigma)$. Wenn ν^{-1} ein ganzzahliges Mehrfaches der Fensterbreite σ ist, so verschwindet der gleitende Mittelwert.

Aufgabe 3

$$f(t) = [\sin(t)]^2 = (1 - \cos(2t))/2 = 1/2 - 1/2 \cos(2t).$$

Die kleinste Periode der Schwingung ist $T = \pi$ und die nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten sind $a_0 = a_1 = 1/2$.

Aufgabe 4

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_n t) dt = \frac{1}{T} (\int_{-T/2}^0 - \int_0^{T/2}) \exp(-i\omega_n t) dt = -i/(2\pi n)[1 - (-)^n].$$

Die Fourierreihe ist also $f(t) = (2/\pi)\{\sin(1 \cdot 2\pi t/T) + \sin(3 \cdot 2\pi t/T)/3 + \sin(5 \cdot 2\pi t/T)/5 + \dots\}$.

Aufgabe 5

$c_n = \frac{1}{2} [\int_{-1}^0 (-t) \exp(-i\omega_n t) dt + \int_0^1 t \exp(i\omega_n t) dt] = \int_0^1 t \cos(\omega t) dt = \sin(\omega)/\omega + [\cos(\omega) - 1]/\omega^2$. Da $\omega_n = \pi n$, haben wir $c_0 = 1$ und $c_{n>0} = [(-)^n - 1]/(\pi n)^2$.

Aufgabe 6

(a) $\hat{f}(\nu, \tau) = \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} \exp(-i\nu t) \exp(i\omega t) dt = \sin[(\omega - \nu)\sigma]/[(\omega - \nu)\sigma] \exp[i(\omega - \nu)\tau]$.

(b) $|\hat{f}(\nu, \tau)| = |\sin[(\omega - \nu)\sigma]/[(\omega - \nu)\sigma]|$ ist maximal bei $\nu = \omega$.

(c) Die (Kurzzeit-) Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung, d.h. $\mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2)$. Also können wir schreiben $g(t) = [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}]/2$ und $\hat{g}_w(\nu, \tau) = \{\sin[(\omega - \nu)\sigma]/[(\omega - \nu)\sigma] \exp[i(\omega - \nu)\tau] + \sin[(\omega + \nu)\sigma]/[(\omega + \nu)\sigma] \exp[-i(\omega + \nu)\tau]\}/2$.

Aufgabe 7

(a) $s'(t_{\text{ext}}) = 0 \Rightarrow t_{\text{ext}} = \pm 1/\sqrt{2\alpha}$. $2t_{\text{ext}} = 2 \text{ ms} \Rightarrow \alpha = 25 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$.

(b) $\hat{s}_\psi(s, \tau) = \int s(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_{\text{haar}}((\tau - t)/s) dt = \frac{1}{2\sqrt{s}} [\int_{\tau-s}^{\tau} - \int_{\tau}^{\tau+s}] s(t) dt = \frac{1}{2\alpha\sqrt{s}} \exp(-\alpha\tau^2) [1 - e^{-\alpha s^2} \cosh(2\alpha\tau s)]$.

Es ist offensichtlich, dass $|\hat{s}_{\text{haar}}(s, \tau)|$ bei $\tau = 0$ lokalisiert ist, also beim Zeitpunkt der Feuerung des Aktionspotentials. s_{max} ist schwieriger zu finden. Dazu suchen wir das Maximum von $f(s) = \hat{s}_\psi(s, \tau = 0) = [1 - e^{-\alpha s^2}]/(\alpha\sqrt{s})$. Wir definieren $g(s) = 2\alpha s^{3/2} e^{\alpha s^2} f'(s) = 1 + 4\alpha s^2 - e^{\alpha s^2}$. Setzen wir $\tilde{s} = \alpha s^2$, so haben wir $g(\tilde{s}) = 1 + 4\tilde{s} - e^{\tilde{s}}$. Die Gleichung $g(\tilde{s}_{\text{max}}) = 0$ muss numerisch gelöst werden (z.B. mit der Newton-Raphson Methode). So findet man $\tilde{s}_{\text{max}} \simeq 2.337$. Das Maximum liegt also bei $s_{\text{max}} = \sqrt{\tilde{s}_{\text{max}}/\alpha} \simeq 1.529/\sqrt{\alpha}$. Dies entspricht etwa der Lebensdauer des Aktionspotentials (2 ms).

A.3 Slides

Folgende Slides enthalten Beispieldaten von typischen Signalen.

Slide 1: Elektromyographisches Signal aus Beispieldaten von [BioSSPy15]. Diese Daten werden auch in Abb. 3.2, 3.3 und 3.5 verwendet.

Slide 2: Tonsignal *Open Arms* [openArms]. Diese Daten werden in der Zeit-Frequenz Analyse in Abb. 3.4 verwendet.

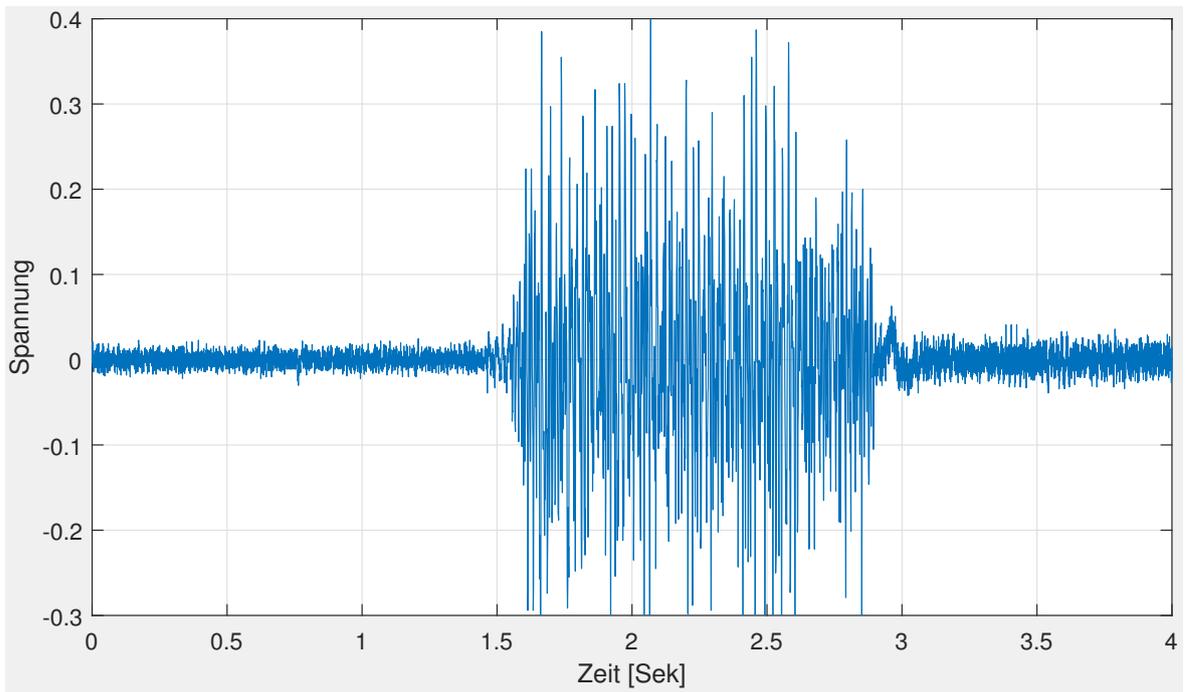
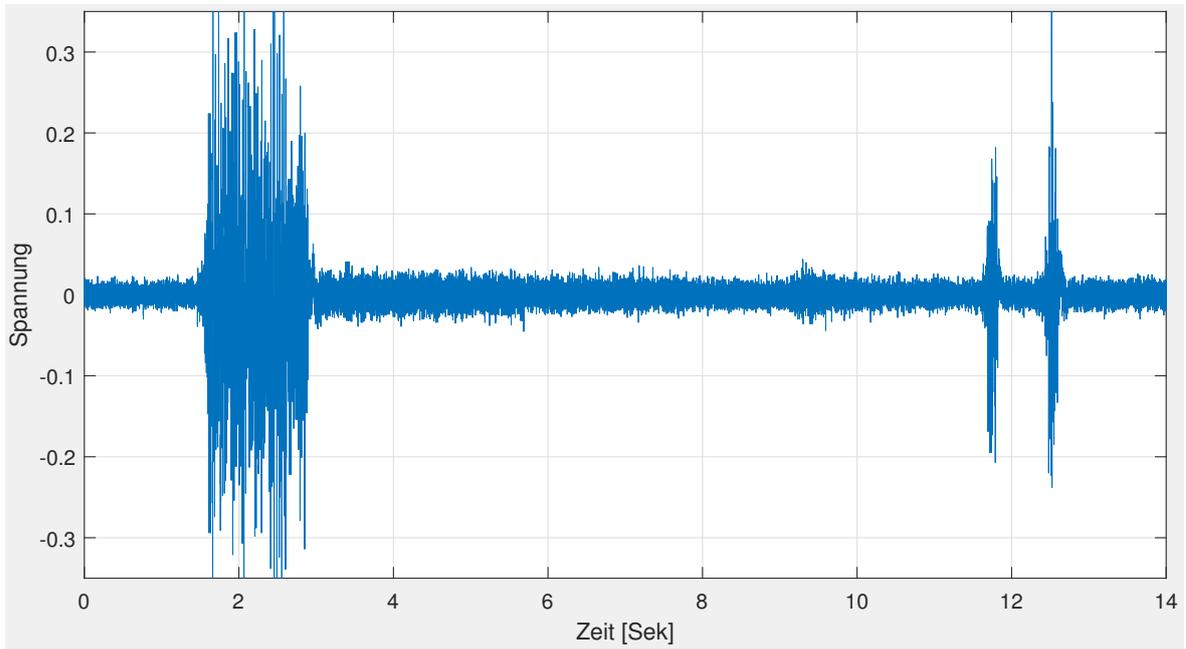
Slide 3: Oben: CHF/EUR Wechselkurs. Unten: Swiss Market Index (SMI) (Quelle: www.swissquote.ch)

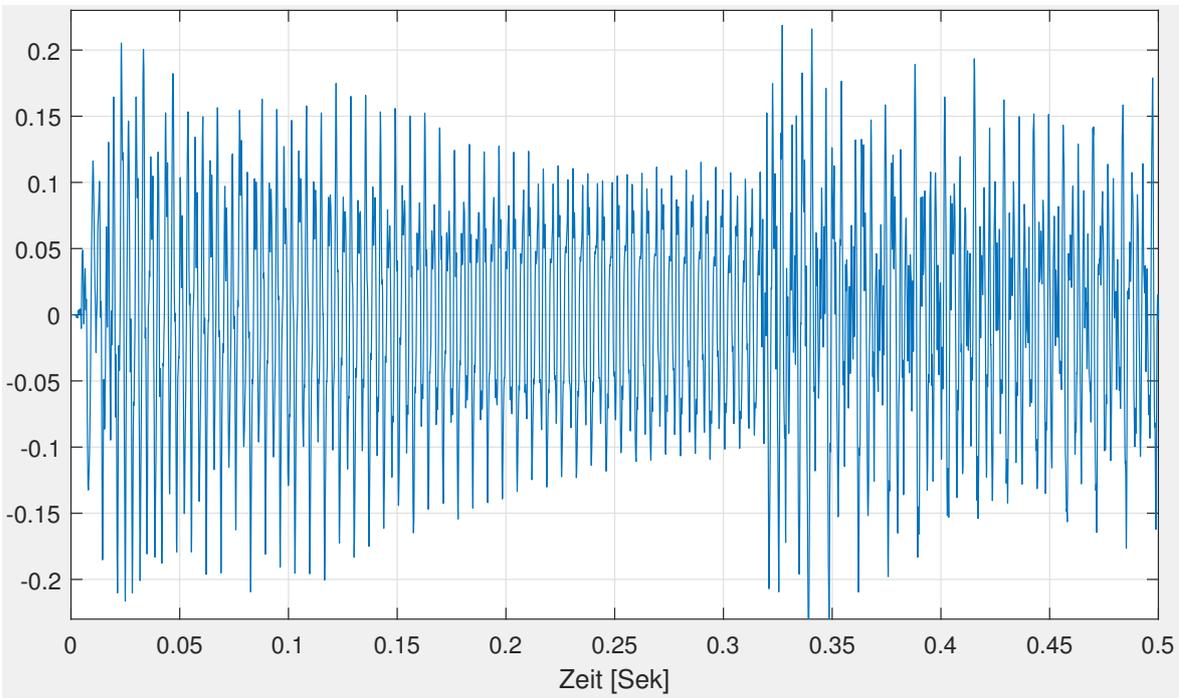
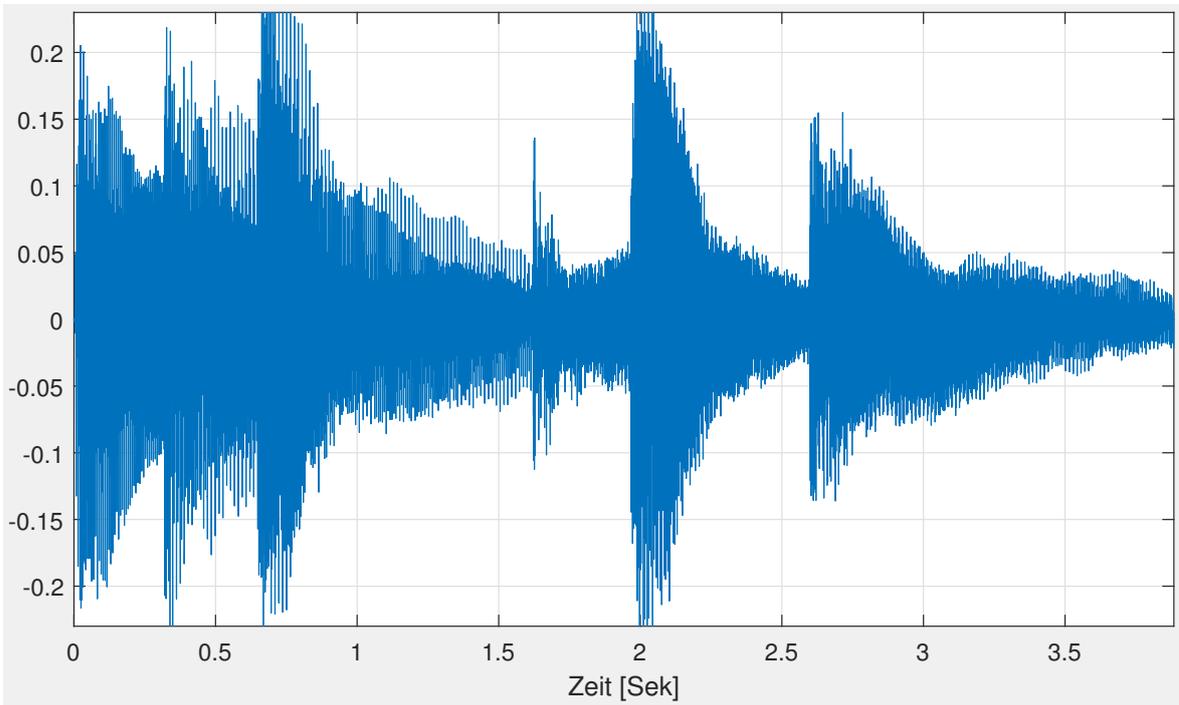
Slide 4: Seismische Daten von Erdbeben am 23. August 2018 in Saxon VS (Quelle: seismo.ethz.ch)

Folgende Slides zur Physiologie der Muskelsteuerung

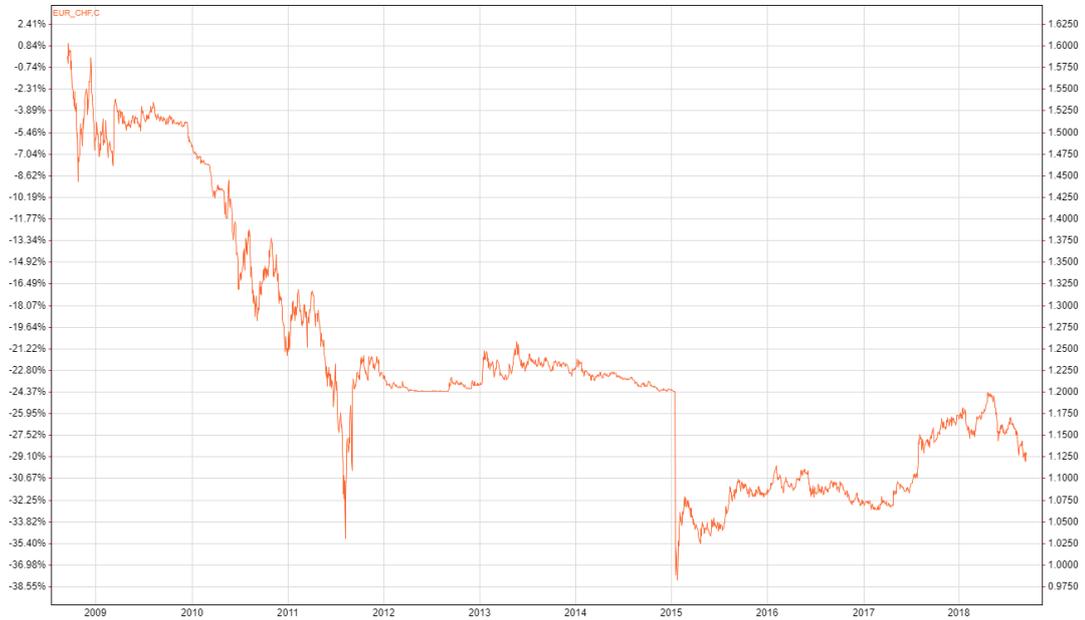
Slide 5: Mechanismus der Muskelkontraktion (Kapitel 2.2)

Slide 6: Aktionspotential (Kapitel 2.3)



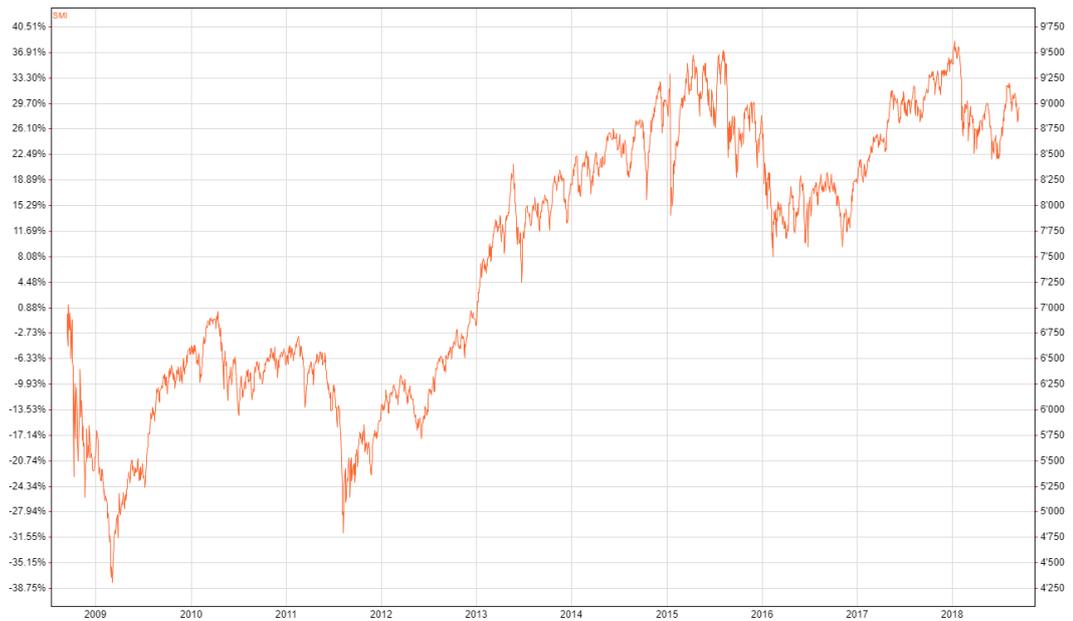


Analysis Tools > EUR_CHF



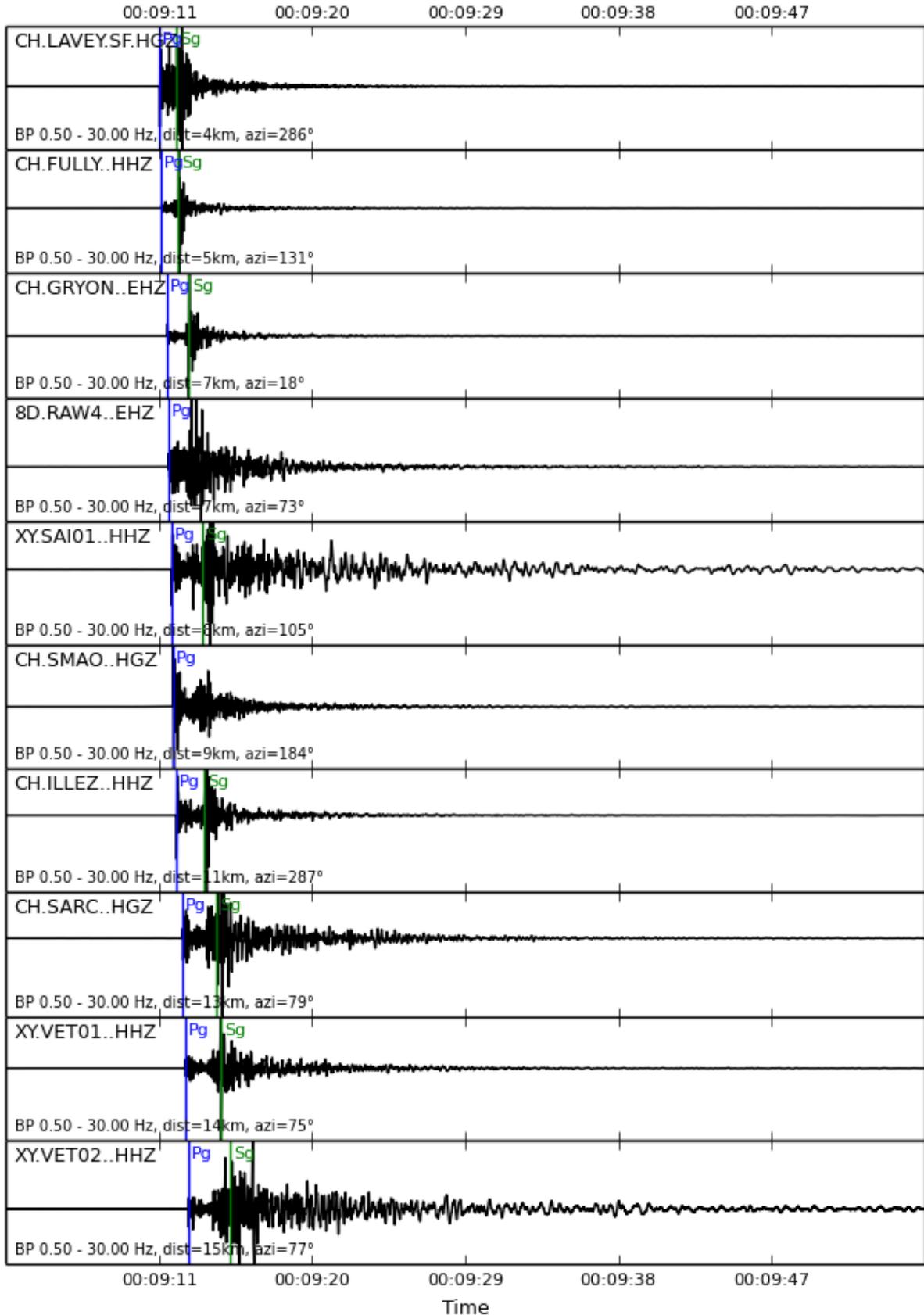
Analysis Tool

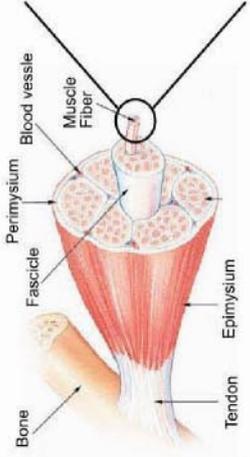
Analysis Tools > SMI



Analysis Tool

smi:ch.ethz.sed/sc3a/origin/NLL.20180823003823.657891.93061 2018-08-23 00:09:09.8 UTC
Saxon VS, manual, MLh = 3.2, Lat: 46.188, Lon: 7.083, Dep: 6.8 km, earthquake





Muscle Fiber (single cell, multi-nuclear)

